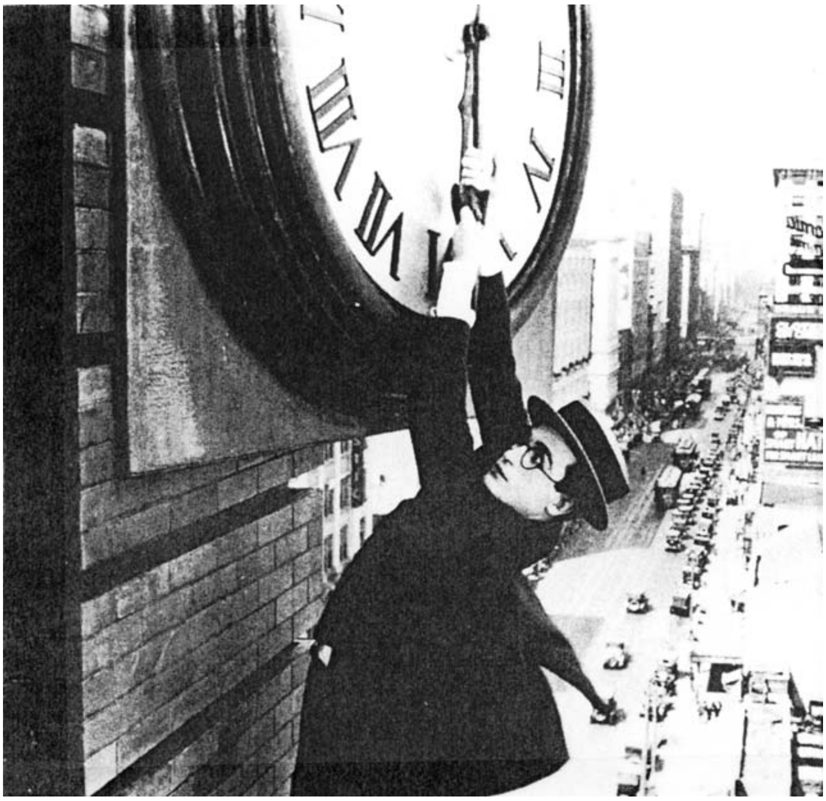
MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

24. előadás:

INTERTEMPORÁLIS DÖNTÉSEK

Kertesi Gábor



Varian 10. fejezet erősen átdolgozva

24.1 Bevezető

– Ennek az előadásnak a során visszatérünk a fogyasztói magatartás vizsgálatához, és a fogyasztó döntési problémáját kibővítjük egy új dimenzióval: az idővel. Az időtényező bevonása az elemzésbe lehetővé teszi, hogy megvizsgáljuk milyen átcsoportosításokat hajthatnak végre a fogyasztók a jelenbeli, illetve a jövőbeli fogyasztási lehetőségeik között. Az időtényező bevonása az elemzésbe lehetővé teszi, hogy a megtakarítások problémáját összekapcsoljuk a beruházások elemzésével. Az előadás második felében kibővítjük az elemzést a beruházási döntésekkel is.

24.2 Az intertemporális költségvetési korlát

– Képzeljünk el egy fogyasztót, aki abban a kérdésben dönt, hogy mennyit fogyasszon egy bizonyos jószágból két időszakban. A két időszak legyen: $t = 0,1$. 0 index jelölje a jelent vagy a mát, az 1-es index jelölje a jövőt vagy a holnapot. Az egyszerűség kedvéért legyen a fogyasztás tárgyát képező jószág az összetett jószág, azaz „a" fogyasztás. Ne bonyolítsuk az elemzést most azzal, hogy többfajta fogyasztási cikket feltételezünk! A fogyasztásnak mint összetett árunak az ára (ahogy megszoktuk) 1. Induljunk ki abból, hogy a fogyasztónak a jelenben és a jövőben is van valamilyen jövedelme. Ha mondjuk a 0 és 1 indexek egy adott év december, illetve a következő év január hónapját jelentik, akkor m_0 és m_1 szimbólumok a fogyasztó idei decemberi, illetve jövő januári fizetését jelölik.

24.1 fólia

– Ezt ábrázolhatjuk egy koordinátarendszerben. A vízszintes tengelyen az e havi fogyasztásunkat, a függőlegesen a jövő havi fogyasztásunkat tüntettük fel. A kiindulópontunk természetesen csak az lehet, amennyi jövedelemmel az egyes hónapokban rendelkezünk. Ezt látjuk az $M = (m_0, m_1)$ készletpontban. Ha az adott havi fogyasztásunkat egyedül az adott hónapban rendelkezésre álló jövedelemtől tesszük függővé, akkor nincs intertemporális döntési probléma. Noha minden egymást követő hónapban van jövedelmünk és fogyasztásunk is, ezek között mégsincs semmiféle kapocs. Az időben zajló történet szétesik $t = 0,1,2,...,T$ darab egymástól független, jelenbeli (idődimenzió nélküli) döntésre.

– Mi van azonban akkor, ha azt gondoljuk, hogy a rendelkezésünkre álló m_0 jövedelem nem elegendő ahhoz, hogy szeretteinknek megfelelő karácsonyi ajándékot vegyünk Mivel jól tudjuk, hogy januárban is lesz jövedelmünk, és azt is el tudjuk képzelni, hogy az ünnepek után képesek leszünk egy kicsit össszehúzni magunkat, irracionális lenne, ha nem gondolkod-nánk el azon a lehetőségen, hogy kölcsönt veszünk fel. Tegyük föl, hogy egy banktól veszünk fel egy rövid távú – egyhavi lejáratú – kölcsönt. Hogyan ábrázolhatnánk ezt a 24.1. ábrán? Igen egyszerűen: a kölcsön segítségével kimozdulhatunk az M pontból jobbra lefelé. Az új feltételek mellett – a kölcsön nagyságától függően – többet is költhetünk decemberben normál fogyasztásra és karácsonyi ajándékra decemberi jövedelmünk-nél. A kölcsön révén megnövekedett fogyasztás legyen: c_0'. Nyilván igaz, hogy: $c_0' > m_0$. A kölcsönt azonban januárban – kamatostul – vissza kell fizetni. Ha a hitelkamatláb r_H (%), akkor – jelenbeli fogyasztásegységben mérve – pontosan $(1+r_H)dc_0$ összeget ($dc_0 = c_0' - m_0$) kell fogyasztónknak a bank részére januárban visszafizetni. Ennyivel lesz kevesebb a januárban felhasználható jövedelme. A visszafizetés után már nem m_1 összegből költhet januárban, hanem csak az $(m_1 - dc_1) = m_1 - (1+r_H)dc_0$ keretből.

– Mit is csinált a fogyasztónk? Kitágította a rendelkezésére álló lehetőségek körét. Átcsoportosított fogyasztási lehetőségeket a jövőből a jelenbe: lemondott dc_1 mennyiségű januári fogyasztá-si lehetőségről annak érdekében, hogy fogyasztása decemberben dc_0 mennyiséggel nagyobb lehessen. A jelen- és jövőbeli fogyasztási lehetőségek közti átváltási arány éppen $dc_1 / dc_0 = -(1+r_H)$. Minden egy forintnyi kölcsönre $(1+r_H)$ forintnyi visszafizetett összeg jut a jövőben. Ha a bank csak azt vizsgálja meg, hogy a fogyasztó rendelkezik-e elég jövőbeli fedezettel, és annak megléte esetén a januári fizetés összeghatárától függően tetszőleges összeget kész kölcsönadni, akkor könnyen belátható, hogy ilyen tranzakciókkal a fogyasztó az $M = (m_0, m_1)$ készletpontból lefelé a $-(1+r_H)$ hajlásszögű egyenes mentén, egészen a vízszintes tengellyel való metszéspontig bármilyen mértékig képes kitágítani jelenbeli fogyasztási lehetőségeit jövőbeli fogyasztási lehetőségeinek rovására. Egy pontra korlátozódó költségvetési korlátját ezzel, ha csak egy irányban, de végtelen számú lehetőségre tágította ki.

– Most képzeljük el az alternatív lehetőséget. Fogyasztónk nem engedheti meg magának, hogy gazdag ajándékokat vegyen karácsonyra, mert januárban már nem halogathatja tovább a lakásában már régóra esedékes felújítási munkálatokat. Januári jövedelme pedig erre nem ad kellő fedezetet. Mit tehet ilyenkor? Félretesz valamennyi pénzt decemberben a felújítás céljaira. Megtehetné azt is, hogy a párnában őrzi megtakarított pénzét, de mivel jól tudja, hogy a bankban kamatot fizetnek érte (r_B a betéti kamatláb), racionális fogyasztóként inkább ott tartja januárig a pénzét. Feltesszük, hogy a bank pontosan ugyanannyi kamatot fizet a betéteseknek, mint amennyi kamatot számít fel a kölcsönökért. A közgazdasági szakzsargon azt az esetet, amikor $r_B = r_H$, **tökéletes hitelpiac**nak nevezi. Az előző okfejtéssel analóg módon, könnyen belátható, hogy ilyenkor a fogyasztó a jövőbeli fogyasztási lehetőségeit tágította ki jelenbeli fogyasztási lehetőségei terhére. S mivel a betéti és hitelkamatlábak egymással megegyeznek, most az $M = (m_0, m_1)$ készletpontból kiindulva, **felfelé** mozdult el a $-(1+r_H)$ hajlásszögű egyenes mentén. Ezzel a tranzakcióval, egészen a függőleges tengellyel való metszéspontig, bármilyen mértékig képes kitágítani jövőbeli fogyasztási lehetőségeit jelenbeli fogyasztási lehetőségeinek terhére. Egyetlen pontra korlátozódó költségvetési korlátját ezzel a másik irányban is végtelen számú lehetőségre tágította ki.

– Az ily módon meghatározott egyenest **intertemporális költségvetési korlátnak** nevezzük.

24.2 fólia

– Az intertemporális költségvetési korlát bonyolultabb formát is ölthet, ha a betéti és hitelkamatlábak egymástól különböznek. Ha a hitelkamatláb magasabb, mint a betéti kamatláb – ez a reális feltételezés, hiszen a bank működési költségeit valamiből fedezni kell – , akkor egységnyi megtakarítás révén kevesebb jövőbeli fogyasztási lehetőséghez lehet jutni, mint amennyi jövőbeli fogyasztásról mondunk le akkor, ha jelenbeli fogyasztásunkat egy egységgel szeretnénk növelni. Ezt az esetet a közgazdászok **tökéletlen hitelpiac**nak szokták nevezni. Az elnevezés arra utal, hogy a bankok közti tökéletes verseny – zérus működési költségek esetén – képes kiegyenlíteni a betéti és hitelkamatlábak esetlegesen meglevő különbségeit. A tökéletes-tökéletlen kifejezés természetesen nem túl szerencsés[1], de mivel ez a megszokott, mi is ezt használjuk.

– A továbbiakban kizárólag tökéletes hitelpiacokat feltételezünk. Az intertemporális döntési probléma tárgyalását nem terheljük meg a betéti és hitelkamatlábak különbözőségének problémájával.

24.3 fólia

– Az intertemporális költségvetési korlátnak algebrai formát is adhatunk. Induljunk ki abból az iménti megállapításunkból, hogy a mai és a holnapi fogyasztási lehetőségeink közti átváltási arányt az intertemporális költségvetési egyenes hajlásszöge fejezi ki! Hogyan lehetne ezt a statikus fogyasztási elméletből ismert árarány analógiájára visszavezetni? Mit jelentenek itt egyáltalán az árak?

– Írjuk fel a költségvetési korlátot a jelen és jövő fogyasztási lehetőségeit értékelő, egyelőre ismeretlen jelentésű „árak" segítségével. Ezen a módon definiáltunk egy V összjövedelmet is: a két időpontbeli jövedelmünk megfelelő időpontbeli árakon értékelt összegét. Teljes differenciálással megkapjuk, hogy a jelen és a jövő fogyasztási lehetőségei közti csereárány a jelen és a jövő fogyasztási lehetőségeihez tartozó áraránnyal egyenlő (3').

– Ha a jelenbeli fogyasztás árát egységnyinek választjuk ($p_0 = 1$), akkor a két időpontbeli fogyasztás közti csereárányt alapul véve azt kapjuk, hogy a jövőbeli fogyasztás „ára": $p_1 = 1/(1+r)$. Ha összegezni akarjuk jelen- és jövőbeli jövedelmünket – ugyanúgy, ahogy az almára és körtére fordított kiadásainkat is csak az árak segítségével vagyunk képesek összegezni – , akkor jövőbeli jövedelmünket és fogyasztásunkat $p_1 = 1/(1+r)$ áron értékelve, voltaképpen nem tettünk mást, minthogy minden jövőben megkeresett és kiadott forintot a jelenben megkeresett és kiadott forintértéken értékelünk.

– Az intertemporális költségvetési korlát így a (6)-os képletnek megfelelően átírható. V_0 nem más, mint az összes jelen- és jövőbeli jövedelmünknek jelenbeli fogyasztási lehetőségeinken számított értéke, röviden: **jelenértéke**. Teljesen analóg módon kiszámíthatjuk a különböző időpontbeli jövedelmeink jövőértékét (V_1) is. Ez esetben azonban a jövőbeli jövedelem „árát" kell egységnyinek választanunk. V_1 nem más, mint az összes jelen- és jövőbeli jövedelmünknek jövőbeli fogyasztási lehetőségeinken számított értéke, röviden: **jövőértéke**.

[1] Miért is lenne az piaci tökéletlenség, hogy a bankoknak működési költségeik vannak? A „tökéletes" hitelpiac ideája voltaképpen mindenfajta piac tökéletes működésével analóg fogalom. Arra rímel, amit eddig is többször felemlítettünk, hogy a tökéletes verseny modelljében **eltekintünk** a piacok (információs, tranzakciós és egyéb) működési költségeitől. Ami persze nem jelenti azt, hogy ilyen költségek nincsenek, hanem pusztán csak azt, hogy a modellek egyszerűsítése érdekében elvonatkoztatunk tőlük.

24.4 fólia

– Az intertemporális költségvetési korlát segítségével könnyen ábrázolhatjuk jövedelmünk jelen-, illetve jövőértékét. A jelenérték nem más, mint a költségvetési egyenes vízszintes tengelymetszetéhez tartozó fogyasztás értéke. Ennyi jövedelmünk lenne ma abban az esetben, ha minden holnapi jövedelmünket mai fogyasztási lehetőségre váltanánk át, vagyis ha annyi kölcsönt vennénk fel ma, hogy csak az összes jövőbeli jövedelemünk lenne elegendő ahhoz, hogy azt visszafizessük. Analóg értelme van jövedelmeink jövőértékének (lásd a függőleges tengelymetszetet!). Ennyi fogyasztási lehetőséggel rendelkeznénk a jövőben, ha minden mai jövedelmünket a jövőbeli fogyasztás céljából megtakarítanánk.

24.3 Fogyasztói preferenciák: intertemporális hasznossági függvény

– Tekintsük most a fogyasztó preferenciáit, ahogyan azt a fogyasztó közömbösségi görbéi reprezentálják!

24.5 fólia

– A közömbösségi görbék alakja megmutatja, hogy a fogyasztó a jövő fogyasztását a jelen fogyasztásához képest hogyan értékeli. Például, ha húznánk egy olyan közömbösségi görbét, amelynek a meredeksége minden pontban –l lenne, akkor ezzel egy olyan fogyasztó intertemporális preferenciáit jelenítenénk meg, akinek közömbös az, hogy amit fogyaszt, azt ma vagy holnap fogyasztja el.[2] Jól viselkedő preferenciák esetén a fogyasztó hajlandó a mai fogyasztását bizonyos mértékben a holnapival helyettesíteni, és sajátos ízlésétől függ az, hogy milyen mértékben. Ebben az összefüggésben igen természetes a preferenciák konvexitása, ami azt fejezi ki, hogy a fogyasztó előnyben részesíti azt az állapotot, ha ma és holnap is rendelkezik bizonyos mértékű fogyasztási lehetőséggel, azzal az állapottal szemben, ha sokat fogyaszthat ma és semmit sem fogyaszt holnap, vagy ha sokat fogyaszt holnap és semmit sem fogyaszt ma.

– Az intertemporális preferenciákat is reprezentálhatjuk a fogyasztói elméletben megismert hasznossági függvénnyel. A fogyasztó **időpreferenciáit** a jelen és jövőbeli fogyasztási lehetőségek közti helyettesítési határrátával írhatjuk le.

24.6 fólia

– A 24.6. ábrán két különböző időpreferenciájú fogyasztó közömbösségi görbéjét mutatjuk be. Az összehasonlítás céljából kiválasztott közös pontban mind az *A*, mind pedig a *B* fogyasztó előnyben részesíti a mai fogyasztást a holnapival szemben, *B* fogyasztó azonban e tekintetben *A*-val szemben **türelmetlenebb**. Természetesen elképzelhetők olyan fogyasztók is, akik határozottan a jövő fogyasztási lehetőségeit preferálják a jelen lehetőségeivel szemben. Ilyenek például azok, aki valamire nagyon gyűjtenek.

---

[2] A jelen és jövő fogyasztási lehetőségei között a ő számára tökéletes a helyettesítés.

24.7 fólia

– A közgazdasági elemzésekben gyakran használják az intertemporális hasznossági függvény egy speciális formáját: a diszkonttényezővel ellátott additív szeparábilis hasznossági függvényt. Ez a függvény az egyes időpontbeli fogyasztási értékek hasznossági indexeit összegzi úgy, hogy a jövőbeli fogyasztás hasznosságát a jelenbeli fogyasztás hasznosságához képest egy konstans tényezővel leértékeli. E függvényforma használata kézenfekvő előnnyel jár: mivel egyetlen paraméterbe – ez itt β – sűríti a fogyasztói időpreferencia mértékét, ezzel az általánosabb függvény-formákhoz képest technikailag kezelhe-tőbbé is teszi.[3]

24.4 Intertemporális fogyasztói döntés

– A költségvetési korlát és a hasznossági függvény ismeretében meghatározhatjuk a fogyasztó optimális döntését. Nem kell mást tennünk, mint – ahogy azt az első félévben megtanultunk – megoldanunk a problémához tartozó feltételes optimalizálási feladatot.

24.8 fólia

– A feladat megoldása során itt is egy **érintőfeltételhez** jutunk. Az optimumban a fogyasztó olyan jelen- és jövőbeli fogyasztási kosarat választ, amelynél intertemporális helyettesítési határrátájának értéke épp megegyezik a jelen és jövőbeli fogyasztási lehetőségek piaci csereárányával. Magyarán azzal, ahogy a hitelpiac közvetítésével képes a jelenbeli jövedelmét jövőbelire váltani (ha megtakarít, illetve kölcsönt nyújt, akkor ezt teszi), vagy ahogy jövőbeli jövedelmét képes jelenbelire cserélni (ha kölcsönt vesz fel, akkor ezt teszi).[4]

24.9 fólia

– Vizsgáljuk meg a 24.9. ábrán látható két fogyasztó döntését. A két fogyasztónak azonosak a jövedelmei[5], de jellegzetesen különböznek a preferenciái. Ha a kamatlábak mindekettőjük számára azonosak, másképpen fognak viselkedni. *A* fogyasztó beteszi a bankba a pénzét, megtakarít – úgy is mondhatjuk, hogy kölcsönt nyújt[6] –, *B* fogyasztó pedig kölcsönt vesz fel.

– Mindkettejükre nézve azonban érvényes az első félévben megismert általános összefüggés: noha az optimumban a két személy preferenciái egymástól különböznek, a helyettesítési határarányok azonban mindegyikőjük számára azonosak.[7]

---

[3] Vigyázat! Az, hogy az időpreferencia mérőszáma egyetlen konstans e hasznossági függvényben, nem feltétlenül jelenti azt, hogy az intertemporális helyettesítési határráta a hasznossági függvény minden pontjában azonos. Miért nem jelenti azt? És milyen speciális esetben jelenti mégis azt?

[4] Értelmezzük az érintőfeltételt a statikus fogyasztói döntésnél megszokott módon! Az első félévben megismert arbitrázs-érvelés alkalmazásával (közgazdasági érvvel és ne mechaniku-san) bizonyítsuk be, hogy nem lehet optimális az az intertemporális „fogyasztói kosár”, amelynél a helyettesítési határráta nagyobb vagy kisebb $(1+r)$-nél. Mit jelent ez?

[5] Úgy is mondhatnánk, hogy azonosak az indulókészletei.

[6] A bank közvetítésével mindenképpen kölcsönt nyújt valakinek. Az ő szempontjából mindegy, hogy kinek.

[7] Mi a jelentése ennek? Itt is keressük meg a fogyasztáselméleti analógiát!

24.10 fólia

– A 24.10. ábrán egy olyan esetet mutatunk be, ahol két – azonos preferenciájú – fogyasztó indulókészleteit az intertemporális költségvetési egyenesen úgy helyeztük el, hogy a hitelpiaci optimumban egyikük kölcsönadó, a másikuk pedig kölcsönvevő legyen.

24.5 Komparatív statika

– Hogyan reagának a fogyasztók a **kamatláb változására**? Ez nyilvánvalóan ugyanolyan jellegű kérdés, mint amikor a fogyasztói elméletben azt firtattuk, hogy hogyan reagálnak a fogyasztók a termékek árarányának megváltozására. Mint a statikus fogyasztói elméletben is láttuk – emlékezzünk a Szluckij-tételre! –, ez nem egyszerű kérdés.

– Lássunk először egy egyszerűbb esetet! A kamatláb emelkedé-se megváltoztatja-e a fogyasztók eredeti hitelpiaci helyzetét? Aki eredetileg kölcsönadó vagy kölcsönvevő volt, az megmarad-e annak a kamatemelés után is? Tekintsük a 24.11. ábrát!

24.11 fólia

– Forgassuk el a költségvetési egyenest egy adott készletpontból (*M*) kétféleképpen. Először úgy, hogy a forgatással a kamatlábat megnöveljük (a költségvetési egyenes ekkor meredekebb lesz), másodszor pedig úgy, hogy a kamatlábat csökkentjük (a költségvetési egyenes ekkor laposabb lesz). Az első esetben – az ábra baloldali paneljén – a fogyasztó a kamatváltozás előtti helyzetben kölcsönadó volt. Könnyen igazolható, hogy a *kamatemelés* nem változtatja meg a fogyasztó hitelpiaci helyzetét. Ha korábban kölcsönadó volt, akkor az is marad. Miért?

– Induljunk ki abból: a kamatemelés előtti állapotban a költségvetési halmaz besatírozott pontjai korábban is mind elérhetők voltak a fogyasztó számára, ő mégis az *E* pontot választotta, *E*-t tehát biztosan előnyben részesíti a satírozott halmaz pontjaival szemben. Mivel az eredeti optimális kosár (*E*) a kamatemelés utáni állapotban továbbra is része marad a fogyasztó költségvetési halmazának, új optimuma *nem eshet* az új költségvetési egyenes olyan pontjára, amely indulókészletétől jobbra helyezkedik el (vagyis része a szürkével jelölt halmaz-nak). Ez esetben ugyanis olyan pontot választana, amelyet már egyszer, *E* opció jelenlétében elutasított. Az új optimum tehát szükségképpen csak az elforgatott költségvetési egyenes azon pontjaira eshet, amelyek a készletponttól balra helyezkednek el.

– Hasonló hatás mutatható ki a kölcsönvevők esetében: ha a fogyasztó a kiinduló helyzetben kölcsönvevő volt, akkor – az előbbivel analóg érvelés segítségével beláthatjuk – , hogy *kamatcsökkentés* esetén az is marad. Ezt az esetet látjuk a 24.11. ábra jobboldali paneljén.

24.12 fólia

– A két alternatív esetről – nevezetesen, hogy mi történik a kölcsönadóval kamatcsökkentés, illetve, hogy mi történik a kölcsönvevővel kamatemelés esetén –

előzetes megfontolások alapján semmi biztosat nem mondhatunk. A dolog kimenetele a fogyasztó sajátos preferenciáin is múlik.

– Térjünk most vissza az eredeti kérdéshez: Hogyan reagálnak a fogyasztók a **kamatláb változására**? A fogyasztói reakciók itt is – akárcsak a statikus fogyasztói elméletben – két komponensből: helyettesítési és jövedelemhatásból állnak. Vizsgáljuk meg őket alaposabban! A 24.13. ábrán egy olyan személy esetében vizsgáljuk meg a kamatláb emelkedésének hatását, aki a kamatemelés előtt kölcsönadó volt. Mint az előző érvelésből tudjuk, ő továbbra is kölcsönadó marad.

24.13 fólia

– Alkalmazzuk a Szluckij-tételt! A kiinduló állapotban a fogyasztó optimális döntése az E pontban volt. A kamatláb emelkedésének hatására pedig átkerült az E' pontba. Folytassunk le egy gondolatkísérletet: Mi történt volna akkor, ha a kamatláb úgy emelkedett volna, hogy közben a fogyasztó nem mozdulhatott volna el eredeti optimumában elért hasznossági szintjéről? Mivel a jelenbeli fogyasztás a jövőbeli fogyasztáshoz képest megdrágult – a kamatláb emelkedése ezt jelenti – a fogyasztó csökkenti jelenbeli, és növeli jövőbeli fogyasztását. Ez a *helyettesítési hatás*. A kölcsönadó helyzete azonban – a 24.12. ábra alapján elvégzett elemzésből tudjuk – kamatemelés következtében egyértelműen javul is. Ez a javulás azon mérhető le, hogy a kamatemelés révén a rögzített hasznossági szint $\widetilde{E}$ pontjához húzott költségvetési egyenesről átkerült a (magasabb jelenértéket képviselő) effektív költségvetési egyenesre. $\widetilde{V}$ jelenértékről elmozdult a magasabb V' jelenértékre. Ez a *jövedelem-hatás*. Mivel jó okunk van rá, hogy mind a jelenbeli, mind a jövőbeli fogyasztást normál jószágnak tekintsük, a jövedelemnövekedés mindkét időpontbeli fogyasztás növelésére ösztönzi a fogyasztót. Mivel a jövőbeli jövedelem esetében a helyettesítési hatás és a jövedelemhatás egy irányba mutat, e tekintetben biztos előrejelzést tehetünk: a kamatláb emelkedése azzal a következménnyel jár, hogy a kölcsönadó bizonyosan növelni fogja jövőbeli fogyasztását. A jelenbeli fogyasztással kapcsolatos előrejelzésünk már nem egyértelmű. Az, hogy ilyen helyzetben a jelenbeli fogyasztás értéke nő, csökken, vagy változatlan marad, az azon múlik, hogy az ellentétes előjelű helyettesítési és jövedelemhatás közül melyik dominálja a másikat.

24.14 fólia

– A 24.14. ábra ugyanezt vizsgálja meg a kölcsönvevőre nézve abban az esetben, ha az a kamatemelés hatására továbbra is kölcsönvevő marad. A most bemutatott érveléssel analóg módon belátható, hogy egy kölcsönvevő számára a kamatláb emelkedése szükségképpen csökkenti a mai fogyasztását (az ő esetében a jövőbeli fogyasztással kapcsolatos előrejelzések a bizonytalanok).[8]

24.6 Fisher-egyenlet

– Az intertemporális fogyasztói döntés modelljét felhasználva, fontos dolgokat tudhatunk meg az inflációról, a fogyasztási javak árának általános emelkedéséről. Ezt

[8] Próbáljuk ki, meg tudjuk-e ismételni az előző érvelést ebben az esetben! Ha igen akkor az előző okfejtést is megértettük.

a szempontot egyszerűen beépíthetjük az elemzésbe. Elegendő azt megenged-nünk, hogy a fogyasztási javak átlagára (az árszínvonal) a két időszakban különbözzék.

24.15 fólia

– Az alábbi eredményre jutottunk:

$$r_N \approx \pi + r_R .$$

– Ez a híres Fisher[9]-egyenlet, amely kimondja: a nominális kamatláb megközelítően egyenlő a reálkamatláb és az inflációs ráta összegével. Mivel a jövőbeli inflációs ráta általában nem ismert, ezért az egyenlet átfogalmazható úgy, hogy a tényleges inflációs ráta helyébe azt az inflációs rátát írjuk be, amelyre a gazdaság szereplői *számítanak* (π^e):

$$r_N \approx \pi^e + r_R .$$

Ezt a következményt így fogalmazhatjuk meg: Minél erősebbek az inflációs várakozások (vagyis minél nagyobb inflációra számítanak a gazdaság a szereplői), annál magasabb lesz a nominális kamatláb.

24.7 A modell kiterjesztése kettőnél több időpont esetére

– Az intertemporális döntés modellje kiterjeszthető kettőnél több periódusra is. Vegyük először ennek a legegyszerűbb esetét: a háromperiódusú modellt!

24.16 fólia

– Egy háromperiódusú modell összerakható két kétperiódusú modellből. Annyit kell csak megtennünk, hogy egy mára és holnapra, valamint egy holnapra és holnaputánra megfogalmazott modellt összekapcsolunk egymással. Hogyan tudjuk a harmadik periódusban megkeresett jövedelmet, illetve fogyasztási kiadást kifejezni az első időszak (a ma) fogyasztásának értékén? Hogyan határozható meg a kétperiódusú modell, két időszakot összekötő, **rövid távú kamatláb**aiból a háromperiódusú modell, hoszabb időszak fogyasztási értékeit összekötő kamatlába? Ha ezt a kérdést képesek vagyunk megválaszolni, akkor a tetszőleges hosszúságú időtávokat összekötő, ún. **hosszú távú kamatláb**at is meg tudjuk határozni.

– Induljunk ki abból, hogy egy tetszőleges *t*-edik időpontbeli rövid távú kamatláb nem tesz mást, mint beárazza a $(t+1)$-edik idő-pontbeli fogyasztást a *t*-edik időpontbeli fogyasztáshoz viszonyítva. Ha például $t=0$, akkor az r_1 kamatláb lehetővé teszi, hogy a $p_1 = 1/(1+r_1)$ formula segítségével beárazzuk az első időszakbeli fogyasztásunkat, a $p_0 = 1$ árú, 0-dik időszakbeli fogyasztásunkhoz képest. Ezeknek az áraknak

[9] Irving Fisher (1867-1947), amerikai közgazdász tiszteletére nevezték el így. Fisher volt az első olyan közgazdász, aki a közgazdasági dinamikát valóban korszerű módon kezelte. Az ő munkássága nyomán vált általánossá az intertemporális döntési problémák itt bemutatott tárgyalási módja. Az eddigiekben alkalmazott diagramot is róla nevezték el Fisher-diagram-nak.

a segítségével tudjuk jelen- és jövőbeli jövedelmünk, illetve fogyasztásunk jelenértékét kiszámítani.

24.17 fólia

– Az ily módon meghatározott árak felhasználásával tetszőleges évpárra tudunk árarányokat számítani úgy, hogy minden esetben a bázisidőszaki fogyasztás árát vesszük egységnyinek. A 24.17. fólián jól látszik, hogy ha az így kapott, egymást követő – rövid távú kamatlábakat tartalmazó – árarányokat összeszorozzuk egymással, akkor megkapjuk két egymástól időben tetszőleges messze levő fogyasztás árarányát is. A szóban forgó árarány természetesen tartalmazza a megfelelő hosszú távú kamatlábat is.

24.18 fólia

– A háromperiódusú modellben a harmadik időszak fogyasztását és jövedelmét ennek a kamatlábnak a segítségével lehet az első időszak fogyasztási lehetőségeinek értékén meghatározni. Ezen az áron értékelve adható hozzá a harmadik periódus jövedelme és fogyasztása a háromperiódusú modell költségvetési korlátjához. Teljesen analóg módon konstuálhatjuk meg egy tetszőlegesen sok periódust tartalmazó intertemporális modell költségvetési korlátját is.

24.8 Intertemporális fogyasztói döntés termelés mellett

– Az intertemporális fogyasztói döntési problémát kiegészíthetjük a termeléssel. Induljunk ki egy önellátó búzatermelő farmer végtelenségig leegyszerűsített, két-időszakos döntési problémájából! Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor farmerünk önellátó termelést folytat!

1. Autarkia

24.19 fólia

– A farmer döntési helyzetét attól a ponttól kezdve követjük nyomon, hogy idei ($t = 0$) termését (m_0) learatta. Jövő évi termését úgy biztosíthatja, hogy az idei termés egy részét félre- teszi vetőmagnak (*k*). A probléma egyszerűsége érdekében feltesszük, hogy a farmer fogyasztása egyedül gabonából áll, továbbá hogy, amit megtermel, azt vagy elfogyasztja idén (c_0), vagy pedig vetőmagként felhasználja jövőre. Termelési technológiáját a $c_1 = f(k)$ konkáv termelési függvény írja le: *k* mennyiségű vetőmag felhasználásával termeli meg a jövő évi búzáját (c_1) . Az idei év perspektívájából szemlélve a dolgot, ha nem tenne félre vetőmagot, vagyis nem ruházna be a jövő évi termelésbe, akkor a jövő évi fogyasztása zérus volna. Jövő évi indulókészlete tehát $m_1 = 0$. Mennyi búzát kell félretennie vetőmagnak, ha azt szeretné elérni, hogy idei és jövőbeli fogyasztását egyaránt magában foglaló fogyasztói kosara optimális legyen?

– A 24.19. ábrán – az előző órán bevezetett – **termelési lehetőségek halmaza** segítségével ábrázoltuk a farmer technológiai lehetőségeit. A termelési lehetőségek határfelülete – $T(c_0, c_1) = 0$ függvény – az $f(k)$ termelési függvény által képviselt termelési lehetőségeket testesíti meg. A vetőmag mennyisége és a jövő évi termés nagysága közti függvényszerű összefüggést ugyanis e határfelületről is leolvashatjuk.

24.20 fólia

– A 24.20. fólián ezt algebrailag is belátjuk: a termelési függvény és a termelési lehetőségek határfelülete pontosan ugyanazt az információtartalmat hordozza. A *TLH* határának bármely (c_0, c_1) pontjában határozzuk meg az idei és a jövő évi búza mennyisége közti transzformációs határarányt (*MRT*-t), az azonosan egyenlő lesz az idei búzából félretett vetőmag $k = (m_0 - c_0)$ pontban mért határtermékével.

24.21 fólia
24.22 fólia

– Ennek a belátása után megoldjuk az önellátó farmer beruházási problémáját. Keressük meg a farmer jólétét maximalizáló optimális vetőmagmennyiséget! Vagyis oldjuk meg a 24.21. fólián látható feltételes optimalizálási feladatot. Az optimum ott lesz, ahol az idei és jövő évi fogyasztás közti helyettesítési határarány megegyezik a transzformációs határaránnyal, vagyis azzal, ahogyan az idei fogyasztás rovására termelés révén növelni tudja jövő évi fogyasztását. Minden más megoldás hatékonyságveszteséggel járna. (**Miért?** Képzeljünk el egy olyan esetet, amikor a közömbösségi görbe két ponton is metszi a *TLH*-ának határfelületét! Ezekben a pontokban nem teljesül az érintőfeltétel. **Adjunk intuitív magyarázatot** rá, hogy ezekben a pontokban miért nem lehet optimális a félretett vetőmag mennyisége! Ha jó intuitív magyarázatot tudunk adni, akkor értjük, miről van szó.)

2. Decentralizált megoldás

– Vizsgáljunk most meg egy alternatív esetet. Farmerünk vállalkozó lesz. Mostantól fogva piacra termel. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az idei és a jövő évi búza *nominális* ára[10] megegyezik, és értéke 1. Ilyen körülmények között hogyan határozhatjuk meg a farmer problémáját? Mennyi vetőmagot tesz félre, és mi lesz a jólétét maximalizáló optimális jószágkosara?

– Vegyük észre, hogy ez esetben a feladatot *két lépésben* kell megoldania. Először is egy **beruházási döntést** kell hoznia. A farmer gazdasága itt úgy működik, mint egy profitmaximalizáló vállalat, amelynek meg kell oldania egy beruházási feladatot. Olyan beruházási volument kell választania (annyi vetőmagot kell félretennie), amelynél a gazdaság profitja maximális lesz.

24.23 fólia

[10] Az az ár, ami egy zsák búzára a piacon ki van írva: $p_0^m = p_1^m = 1$, ahol az *m* felső index jelöli – akárcsak a Fisher-egyenletben – a pénzbeli (*m* = monetary) árat.

– Határozzuk meg mindenekelőtt a profitját! Ha nem ruházna be, akkor jelen és jövőbeli jövedelmeinek jelenértéke $V = m_0 + \frac{m_1}{1+r} = m_0 + 0 = m_0$ volna. A beruházás célja éppen az, hogy jövedelmeinek jelenértékét növelje. (Egyébként mi értelme lenne az egésznek?) A beruházással épp az a célja, hogy jövedelmeinek jelenértékét a profit összegével megnövelje. A farmer profitját úgy kapjuk meg, hogy a jövő évi bevételéből levonjuk idei kiadásait. Mivel a kiadás és a bevétel különböző időpontokban merül fel, azonos nevezőre kell hoznunk őket. Mi itt jelenértéken összegeztünk. $\pi(k) = \frac{1}{1+r} f(k) - k$. Ezt a különbséget kell maximalizálnunk.

24.24 fólia

– Az elsőrendű feltétel ($f'(k) = 1 + r$) – ha első pillantásra nehéz is felismerni – nem más, mint a termeléselméletből jól ismert $MR = MC$ feltétel. Mivel a búza pénzbeli[11] ára 1, az $1 * f'(k)$ érték nem más, mint egységnyi vetőmag-felhasználás határtermékének jövő évi értéke, vagyis az egységnyi vetőmagfelhasz-nálással járó határbevétel. $(1+r)$ pedig nem más mint egységnyi vetőmag-felhasználás határköltsége, hiszen amikor a jövő évi búza előállítása érdekében egy egységnyi búzát nem fogyasztunk el akkor jövőértéken számolva, pontosan $1*(1+r)$ jövedelemről mondunk le. (Minden költség alternatív költség!)

– Az elsőrendű feltételt megoldva, megkapjuk az optimális vetőmag-felhasználás volumenét: k^*-ot. Ezt viszahelyettesítve a profitfüggvénybe, megkapjuk a farmergazdaság optimális profitjának értékét (π^*). Ha az optimális profit értékét – természetesen jelenértékre átszámítva – hozzáadjuk a farmer indulókészletének jelenértékéhez (*V*-hez), azzal az intertemporális költségvetési korlátot kitoltuk egészen a termelési lehetőségek határáig, egészen addig, ahol a költségvetési korlát már a termelési lehetőségek határfelületének *érintője* lesz. Ebben a pontban teljesül a jól ismert **érintőfeltétel**.

– Most sort keríthetünk a farmer második problémájának a megoldására. A farmer zsebében most indulókészletének jelenértékénél nagyobb jelenértékű jövedelem lapul: $V^* = V + \pi^*$. Hogyan osztja fel ezt a jövedelmet a jelen- és a jövőbeli fogyasztás céljaira? Most meg kell hoznia **fogyasztási döntését**. Ugyanazt a feladatot kell megoldania, mint amit már az előadás első felében megoldottunk.

24.25 fólia

– A farmer fogyasztóként olyan optimális fogyasztói kosarat választ, amelynél fogyasztásának intertemporális helyettesítési határrátája épp megegyezik a mai és holnapi fogyasztási lehetőségek piaci csereárányával. Másképpen megfogalmazva: jelen-, illetve jövőbeli fogyasztása akkor tekinthető optimálisnak, ha jelen- és jövőbeli fogyasztását egymáshoz képest pontosan annyira értékeli, mint amennyiért jövőbeli fogyasztását a hitelpiacon jelenbeli fogyasztásra tudná cserélni.

[11] Arról az árról van szó, ami a zsákra van rátűzve.

3. Fisher-féle szeparációs tétel

– Ez az eredmény – mint már az előadás első részében említettük – független attól, hogy a fogyasztó (jelen esetben: a farmer) milyen prefenciákkal rendelkezik.

24.9 fólia ismét

– Ha a hitelpiacok tökéletesek, akármilyen preferenciájú legyen is a fogyasztó, hitelfelvétel vagy kölcsönnyújtás révén mindig képes eleget tenni az említett optimumfeltételnek. Ez azonban egyszersmind azt is jelenti, hogy beruházási és fogyasztói döntése tökéletesen szeparálható egymástól.

24.26 fólia

– A 24.26. ábrán egy grafikonon ábrázoltuk a farmer beruházási és fogyasztói döntését. Időpreferenciájával kapcsolatban pedig három alternatív feltevést fogalmaztunk meg: *A*, *B* és *C* feltevést. Minél közelebb áll *C*-hez, relatíve annál többre értékeli az idei fogyasztást a jövő évihez képest, minél közelebb áll *A*-hoz annál többre értékeli a jövő évi fogyasztását az ideihez képest. Az ábra leglényegesebb üzenete az: akármilyenek is az preferenciái, mindenképpen ugyanazt a beruházási döntést fogja meghozni. Ez a felismerés az alapja a dinamikus közgazdaságtan egy igen fontos tételének, amelyet megalkotójának tiszteletére Fisher[12]-féle szeparációs tételnek neveztek el.

24.27 fólia

– Ennek a tételnek a beruházás-, illetve tőkeelméletben[13] igen nagy hasznát vesszük. *Ha* az említett feltételek fennállnak, akkor az optimális beruházási döntés meghatározásakor nem szükséges a probléma legáltalánosabb reprezentációjáig, a beruházási döntést *is* meghozó fogyasztó haszonmaximalizálási problémájáig elmennünk, elegendő a jóval egyszerűbb beruházási (vagyon-maximalizálási) problémát megoldanunk. Biztosak lehetünk abban, hogy akármilyen preferenciájú szereplő legyen is a döntéshozónk, beruházási döntése – preferenciáitól függetlenül – ugyanaz lesz.

– Végezetül ejtsünk néhány szót a tételben megfogalmazott kikötésekről! A 2. kikötés az előadás első felében elmondottak alapján eléggé kézenfekvő. Ha a betéti és hitelkamatlábak különböznek, akkor a kölcsönadók és kölcsönvevők más-más intertemporális költségvetési korláttal néznek szembe, így beruházási döntésük érintőfeltétele is különböző lesz. Ami az 1. kikötést illeti, ott az a gond, hogy ha az intertemporális hasznossági függvénynek más argumentumai is vannak – a legjobb példa erre a szabadidő –, akkor a fogyasztók jólétüket nemcsak fogyasztásban (s így pénzben) kifejezett dolgokban, hanem másban (például szabadidőben) is mérik, melyet ez esetben nem lehet teljes mértékben fogyasztási lehetőséggel kiváltani. Beruházás révén márpedig egyedül *pénzbeli* jövedelmünket tudjuk csak növelni.

[12] Irving Fisherről van itt is szó.
[13] A tétel alkalmazásával jövőbeli tanulmányaik során nagy valószínűséggel két helyen is találkozhatnak: a vállalati pénzügyek, illetve a munkaerőpiac gazdaságtana című tantárgyban. Az előbbi esetben a tétel a fizikai tőkejavakba, az utóbbi esetben az emberi tőkébe (az emberi tudásba) való beruházásokra konkretizálható.

Irving Fisher
(1867–1947)

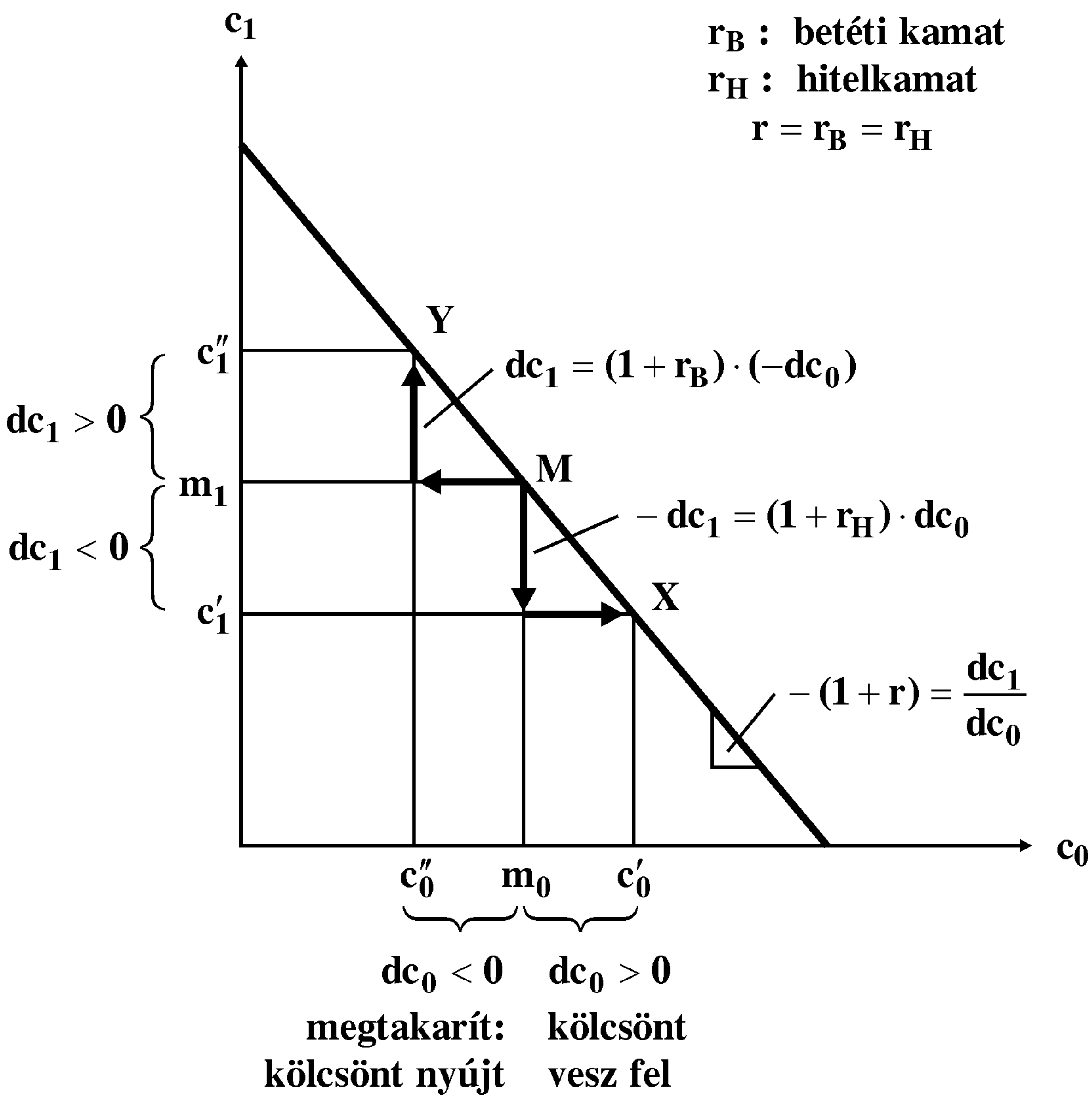
24. előadás

INTERTEMPORÁLIS DÖNTÉSEK

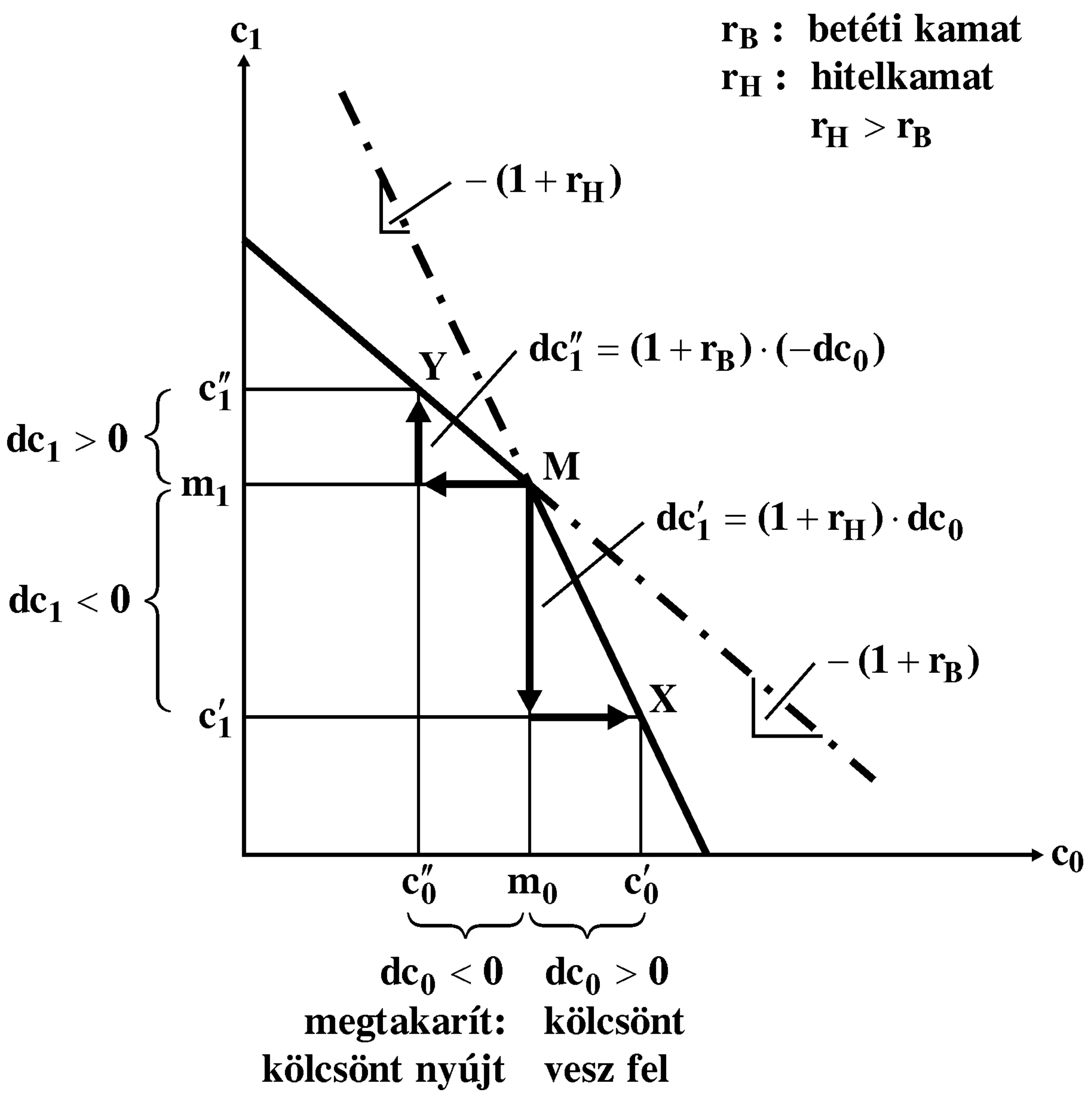
MELLÉKLET

Kertesi Gábor

24.1
Intertemporális költségvetési korlát (tökéletes tőkepiac/hitelpiac: $r_B = r_H$)



24.2
Intertemporális költségvetési korlát
(„tökéletlen” tőkepiac/hitelpiac: $r_B \neq r_H$)



24.3
A jelen- és jövőbeli jövedelmek jelenértéke és az intertemporális költségvetési korlát

A jelen és a jövő fogyasztási lehetőségei közti átváltási összefüggést az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$-\frac{dc_1}{dc_0} = 1 + r \tag{1}$$

Írjuk föl az intertemporális költségvetési korlátot a jelen- és jövőbeli fogyasztási lehetőségek „árainak" segítségével

$$p_0 c_0 + p_1 c_1 = p_0 m_0 + p_1 m_1 \equiv V, \tag{2}$$

ahol V jelen- és jövőbeli jövedelmeink összértékét képviseli.

Rögzítsük V-t, és differenciáljuk teljesen (2)-t c_0 és c_1 szerint!

$$p_0 dc_0 + p_1 dc_1 = 0 \tag{3}$$

Átrendezve:

$$-\frac{dc_1}{dc_0} = \frac{p_0}{p_1} \tag{3'}$$

Legyen a jelenbeli fogyasztás (c_0) a numéraire, vagyis legyen $p_0 = 1$!

24.3
A jelen- és jövőbeli jövedelmek jelenértéke és az intertemporális költségvetési korlát (folytatás)

Ekkor (1)-et (3')-be helyettesítve, ezt kapjuk:

$$-\frac{dc_1}{dc_0}=\frac{1}{p_1}=1+r \qquad (4)$$

Vagyis:

$$\text{ha} \quad p_0=1, \quad \text{akkor} \quad p_1=\frac{1}{1+r} \qquad (5)$$

(5) felhasználásával írjuk át (2) intertemporális költségveté-si korlátot!

$$c_0+\frac{c_1}{1+r}=m_0+\frac{m_1}{1+r}\equiv V_0, \qquad (6)$$

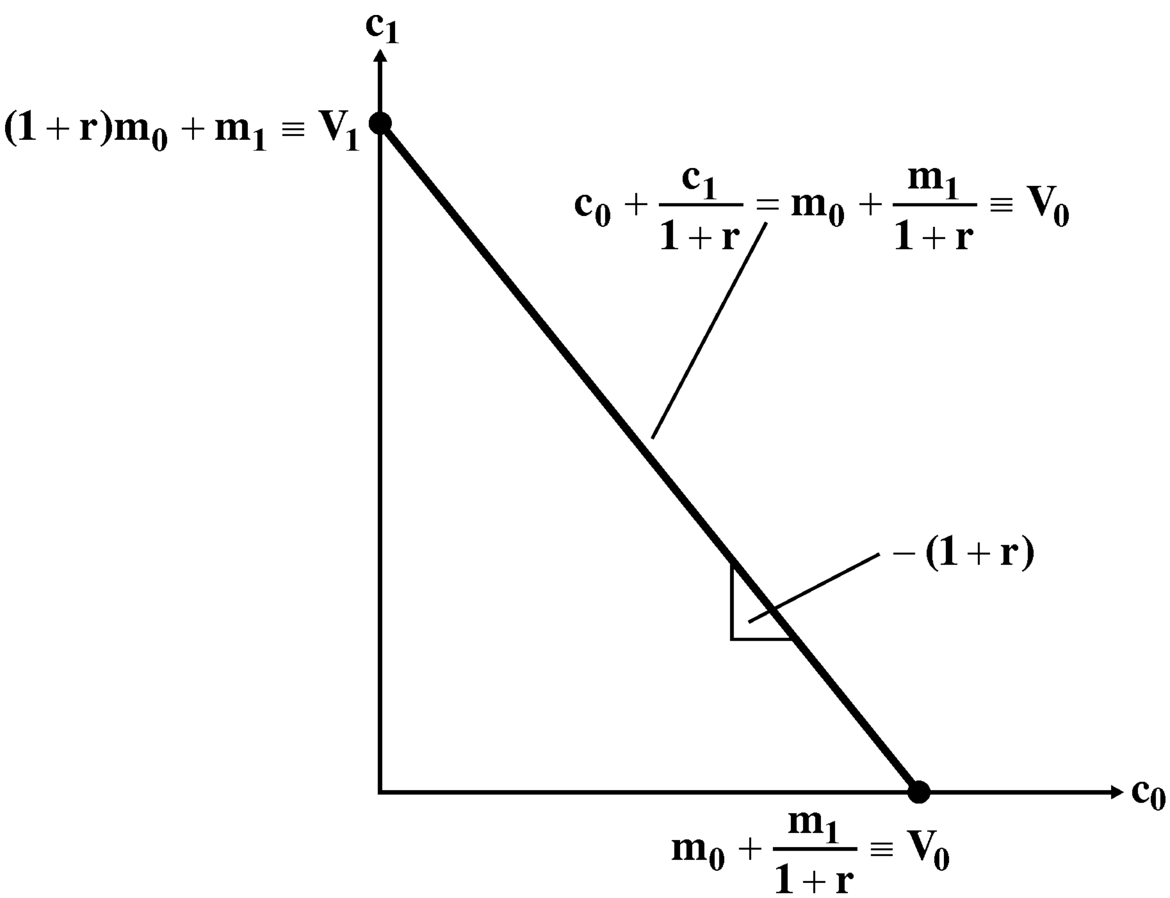
ahol V_0 nem más, mint az összes jelen- és jövőbeli jövedelmünk <u>jelenértéke</u> (jelenbeli fogyasztási lehetőségünk „árán" számított értéke).

(4)-ből következően, amennyiben c_1-et választanánk numéraire-nek ($p_1=1$), akkor $p_0=1+r$. Ez esetben az intertemporális költségvetési korlát így festene:

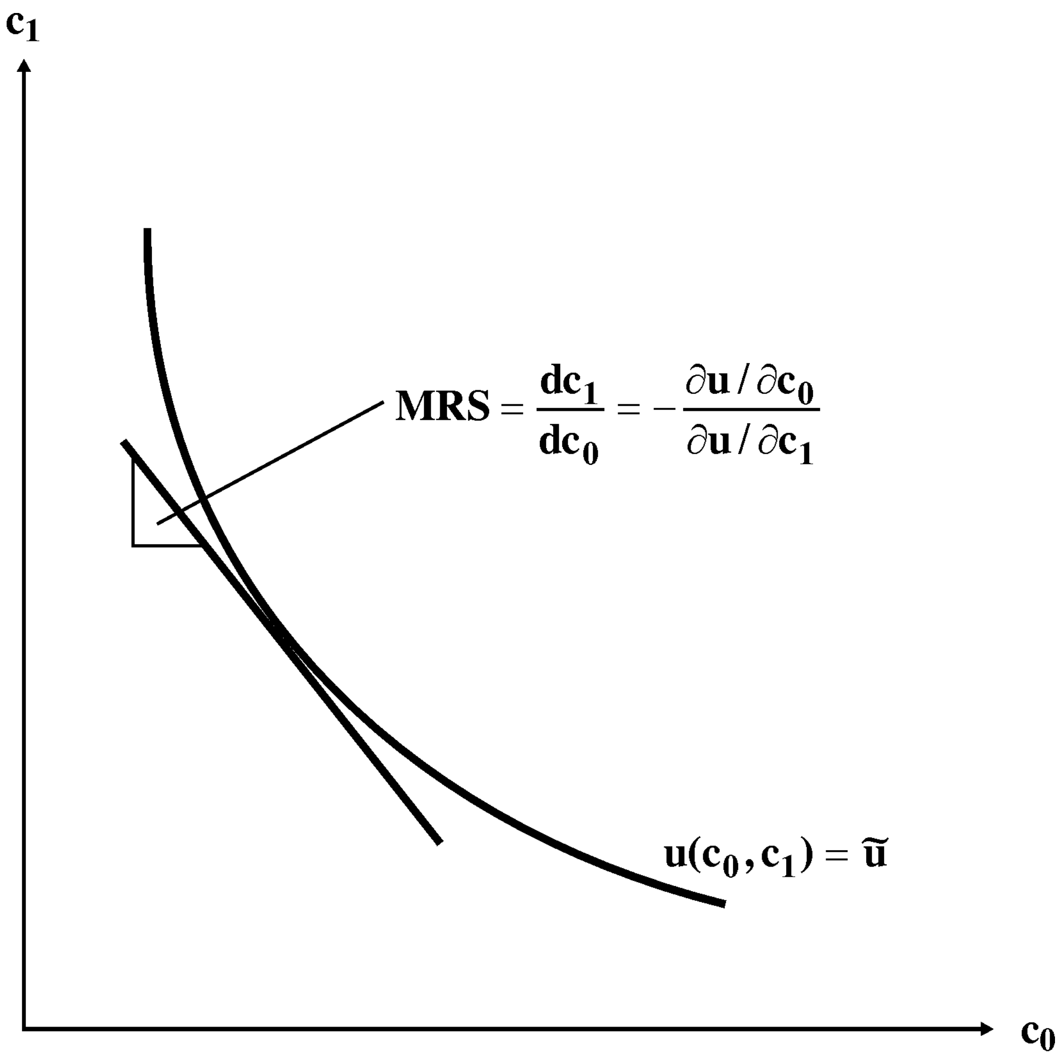
$$(1+r)c_0+c_1=(1+r)m_0+m_1\equiv V_1, \qquad (7)$$

ahol V_1 nem más mint összes jelen- és jövőbeli jövedelmünk <u>jövőértéke</u> (jövőbeli fogyasztási lehetőségünk „árán" számított értéke).

24.4
A jelenérték (a jövőérték) és az intertemporális költségvetési korlát



24.5
Az intertemporális hasznossági függvény és helyettesítési határarány



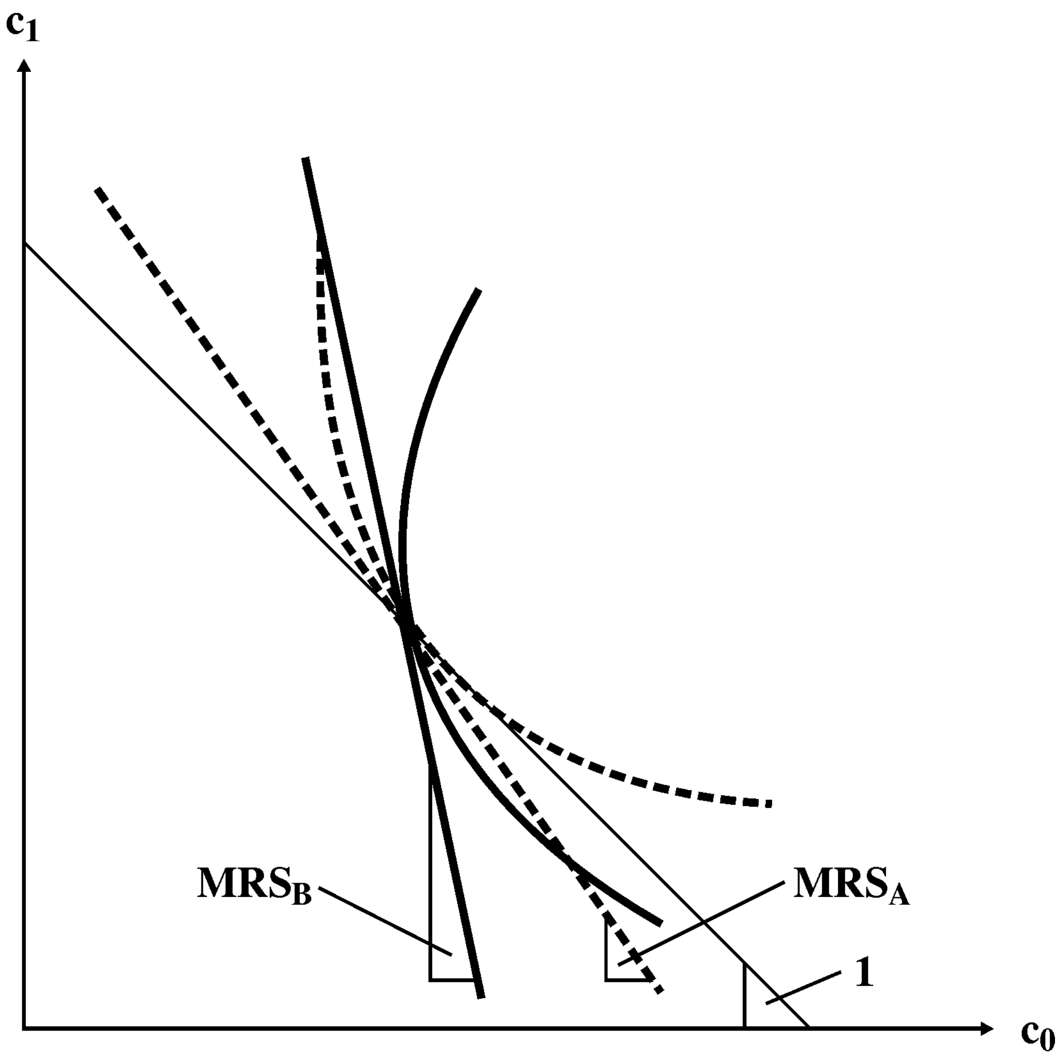
Differenciáljuk teljesen $u(c_0,c_1) = \tilde{u}$ hasznossági függvényt c_0 és c_1 szerint, rögzített $u = \tilde{u}$ mellett!

$$\frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_0} dc_0 + \frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_1} dc_1 = 0 \qquad (1)$$

Átrendezve:

$$-\frac{dc_1}{dc_0} = \frac{\partial u / \partial c_0}{\partial u / \partial c_1} \equiv \mathrm{MRS}. \qquad (2)$$

24.6
Különböző időpreferenciájú fogyasztók



$MRS_B > MRS_A > 1$

„B" a jelenbeli fogyasztást jobban előnyben részesíti a jövőbeli fogyasztáshoz képest, mint „A".

24.7
Additív szeparábilis hasznossági függvény diszkonttényezővel: az intertemporális hasznossági függvény egy fontos speciális esete

$$u(c_0, c_1) = v(c_0) + \beta v(c_1) \tag{1}$$

$$u(c_0, c_1) = v(c_0) + \frac{1}{1+\rho} v(c_1), \tag{1'}$$

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < \beta \leq 1 \tag{2}$$

ahol ρ a diszkontláb (vagy diszkontráta), β pedig a diszkonttényező. β azt méri, hogy a fogyasztó szubjektíve milyen mértékben értékeli kevesebbre a jövőbeli fogyasztás hasznosságát a jelenbeli fogyasztás hasznosságánál.

β nem más mint a fogyasztó időpreferenciájának mérőszáma: milyen mértékben értékeli a jelent a jövőhöz képest többre.

Példa:

$$u(c_0, c_1) = \ln c_0 + \beta \ln c_1 \tag{3}$$

HF:

Határozzuk meg a helyettesítési határarányt, és értelmezzük különböző időpreferenciájú fogyasztókra (lásd 24.6. fólia)!

24.8
Intertemporális fogyasztói döntés

$$\max_{c_0, c_1} u(c_0, c_1) \tag{1}$$

$$\text{kf}: \ c_0 + \frac{c_1}{1+r} = m_0 + \frac{m_1}{1+r} \equiv V \tag{2}$$

A Lagrange-feladat:

$$L = u(c_0, c_1) - \lambda\left(c_0 + \frac{c_1}{1+r} - V\right) \tag{3}$$

ERF:

$$c_0: \qquad \frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_0} = \lambda \tag{4}$$

$$c_1: \qquad \frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_1} = \lambda \frac{1}{1+r} \tag{5}$$

$$\lambda: \qquad c_0 + \frac{c_1}{1+r} = V \tag{6}$$

Osszuk el egymással (4)-et és (5)-öt, és megkapjuk az intertemporális fogyasztói döntési probléma optimalitási feltételét (az érintőfeltételt):

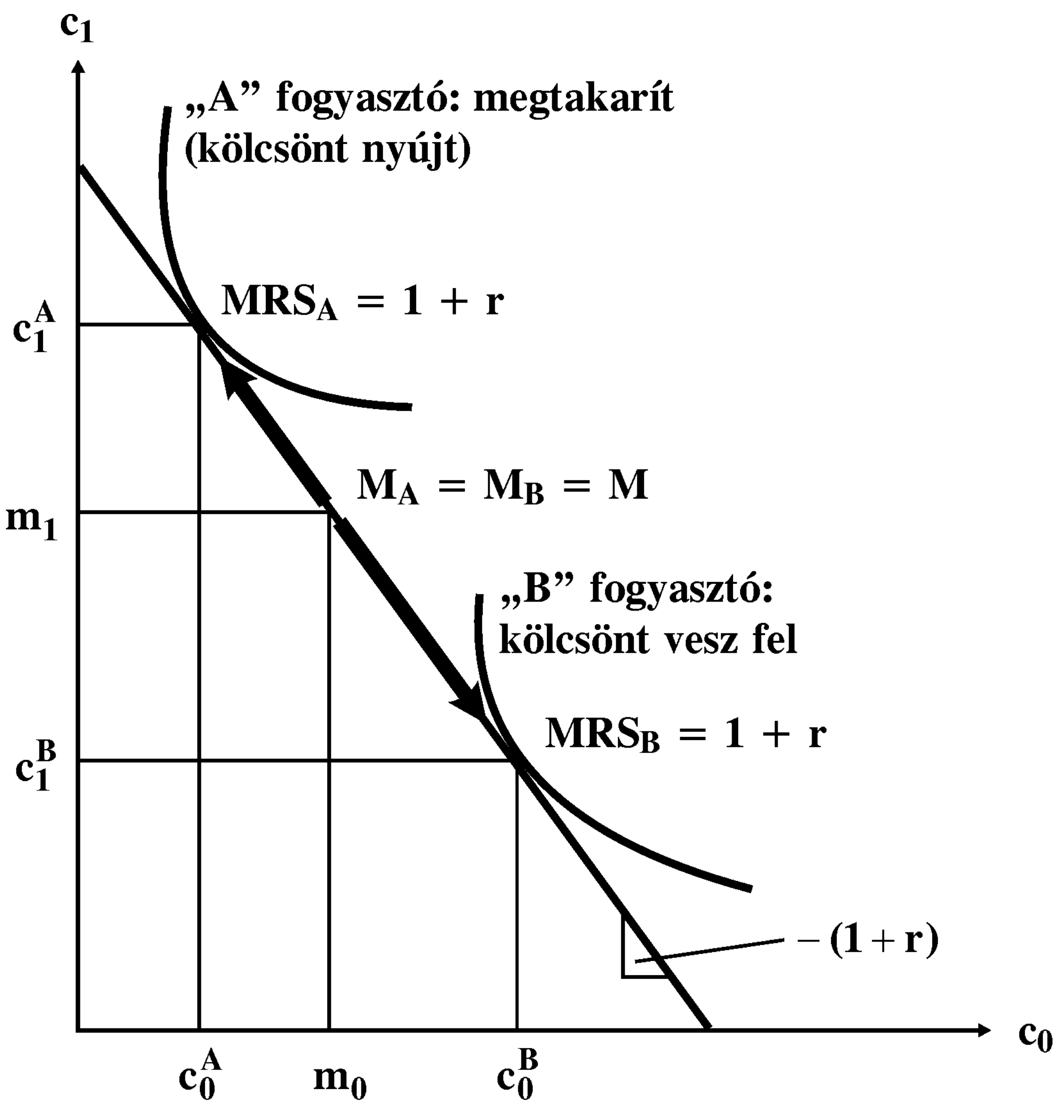
$$\frac{\partial u / \partial c_0}{\partial u / \partial c_1} = 1 + r \tag{7}$$

Másképpen:

$$MRS = 1 + r \tag{7'}$$

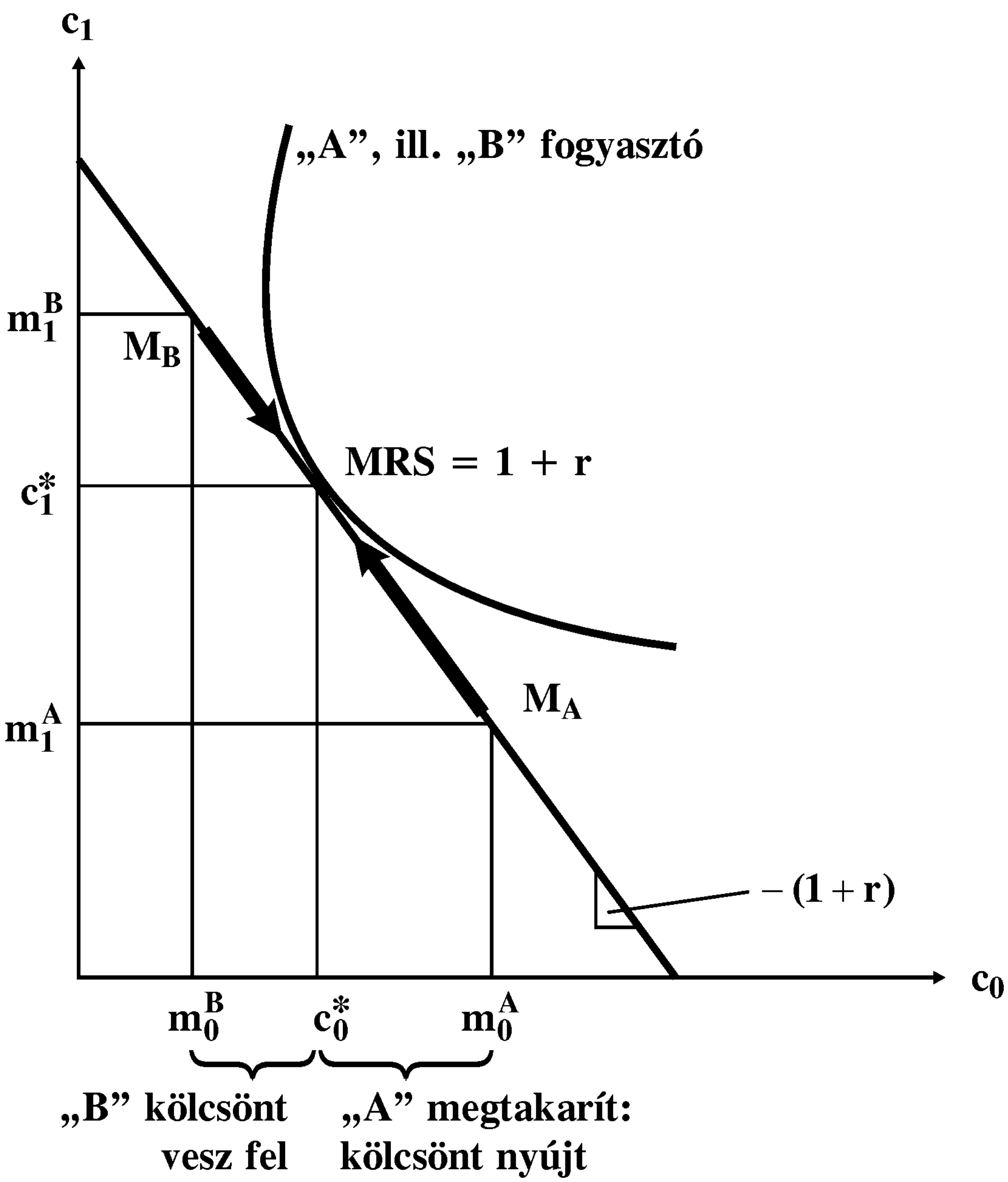
(7) és (6) együttesen meghatározzák az optimális c_0^* és c_1^* értékét.

24.9
Intertemporális fogyasztói döntés: azonos indulókészletek, különböző preferenciák



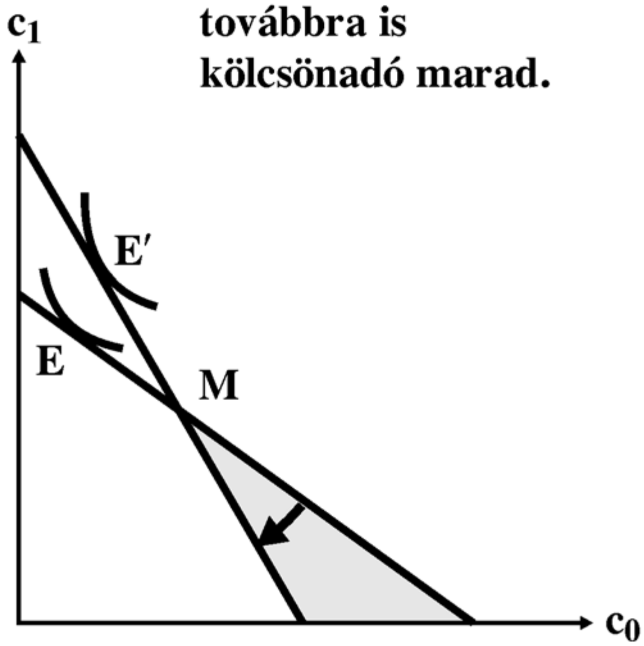
$$MRS_A = 1 + r = MRS_B$$

24.10
Intertemporális fogyasztói döntés: különböző indulókészletek, azonos preferenciák

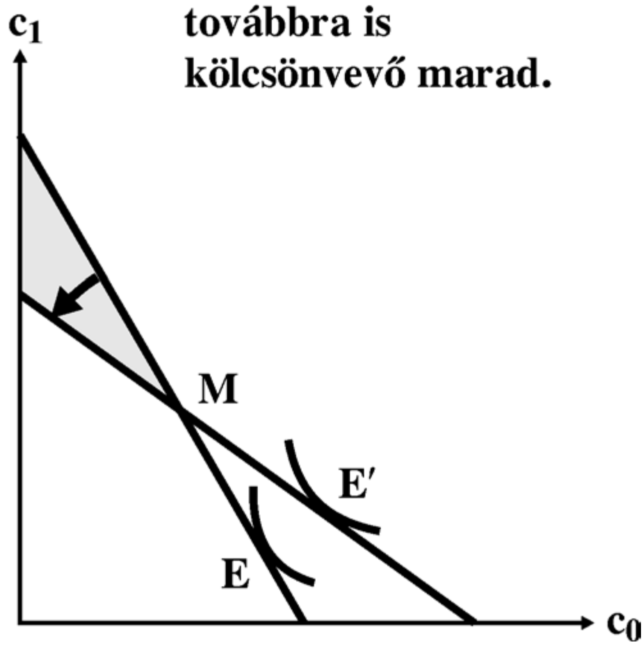


24.11
A kamatláb változásának hatása a kölcsönadó, illetve a kölcsönvevő helyzetére egyértelmű esetekben

**Ha r ↑ ⇒
a kölcsönadó
továbbra is
kölcsönadó marad.**



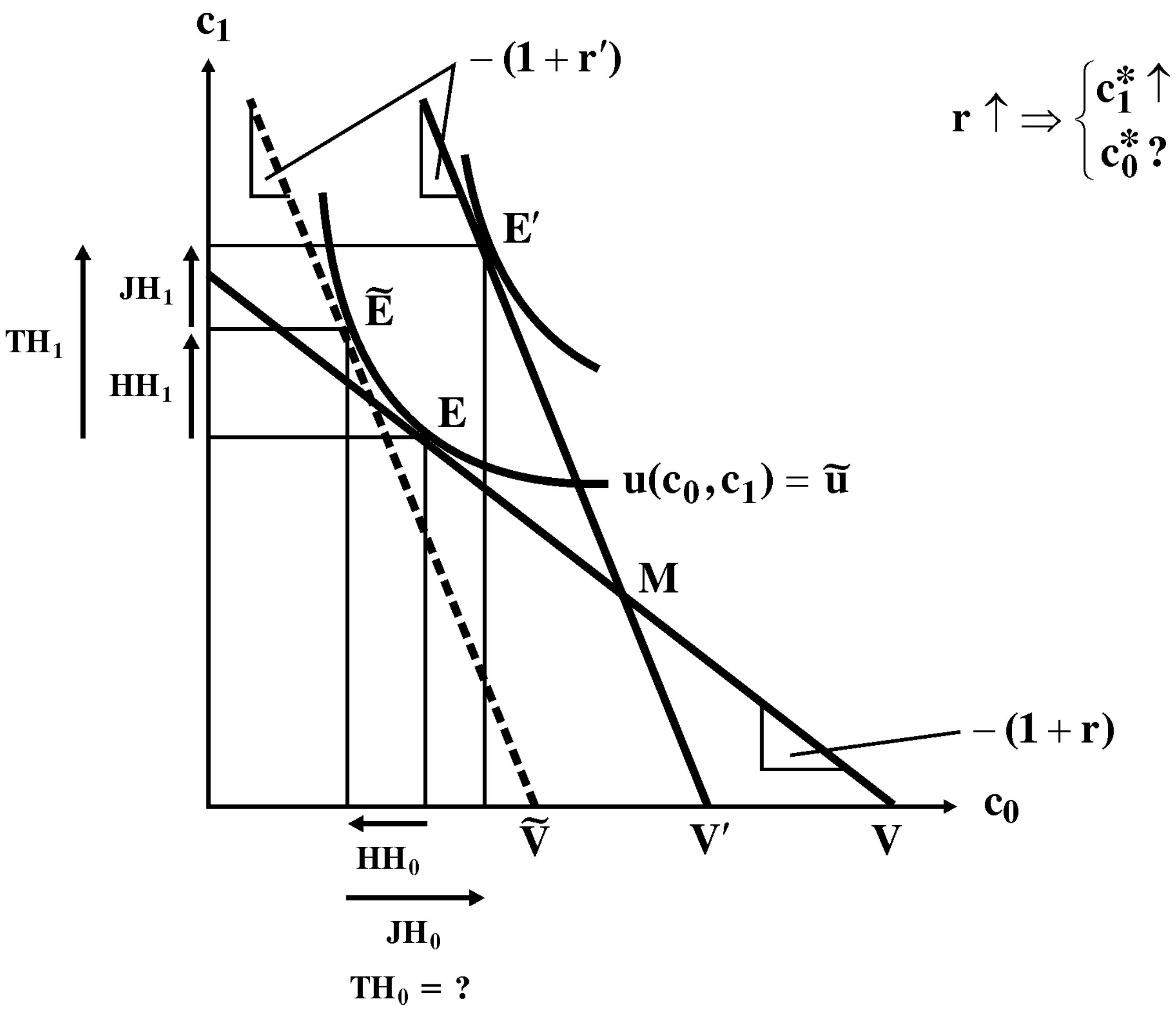
**Ha r ↓ ⇒
a kölcsönvevő
továbbra is
kölcsönvevő marad.**



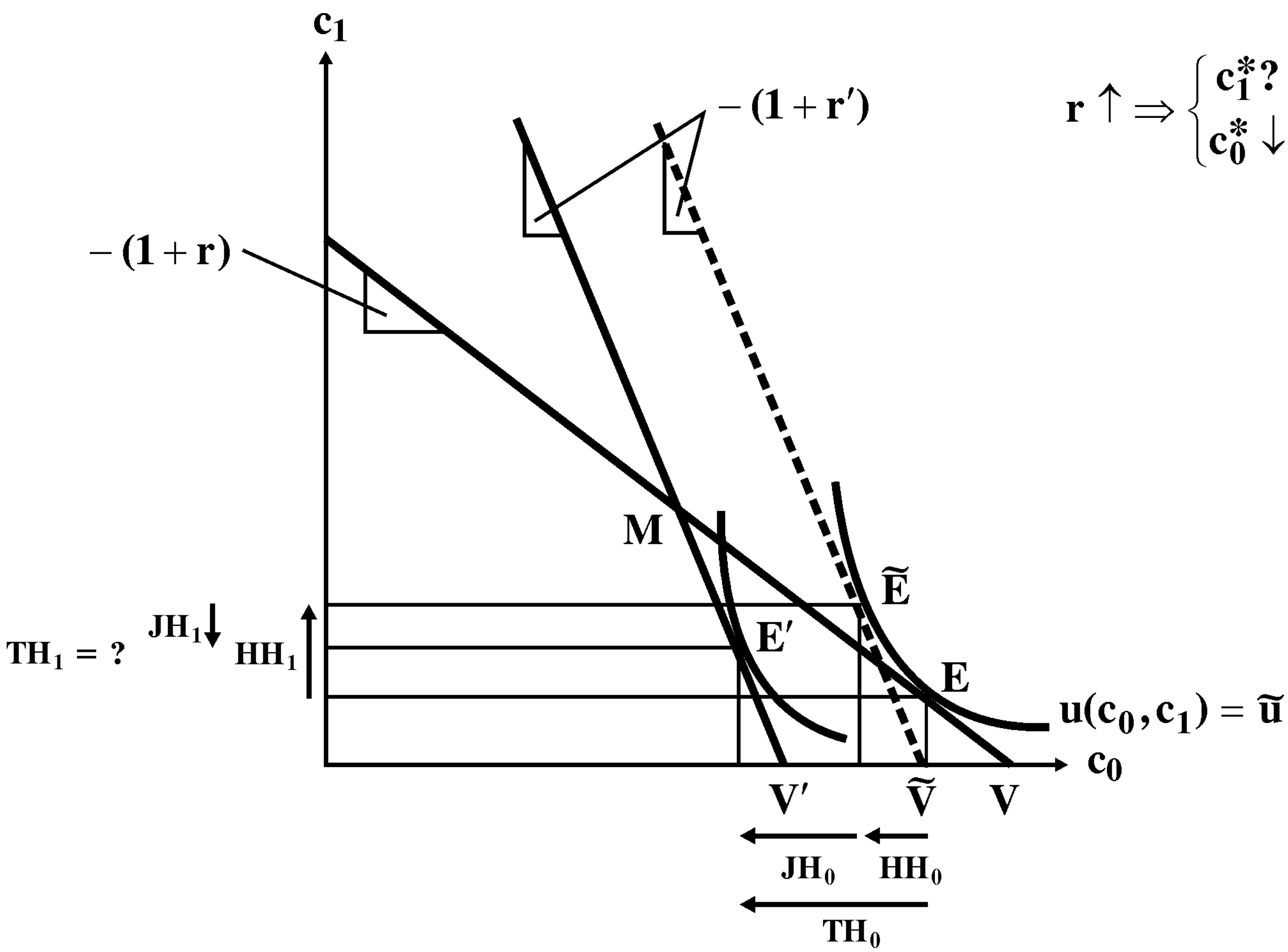
24.12
A kamatláb változásának hatása a kölcsönadó, illetve kölcsönvevő helyzetére minden esetben

A fogyasztó a kezdeti állapotban	Hogyan változik a helyzete ha:	
	r↑?	**r↓?**
Kölcsönadó	**Továbbra is kölcsönadó marad**	**?**
Kölcsönvevő	**?**	**Továbbra is kölcsönvevő marad**

24.13
A kamatláb emelkedésének hatása a <u>kölcsönadóra</u> (r ↑ hatására ő továbbra is mindenképp kölcsönadó marad)



24.14
A kamatláb emelkedésének hatása a <u>kölcsönvevőre</u> (<u>amennyiben</u> továbbra is kölcsönvevő marad)



24.15
Fisher-egyenlet

A jelenbeli fogyasztás dc_0 egységéről való lemondás $(1+r_R)dc_1$ jövőbeli fogyasztásegység megszerzését teszi lehetővé, <u>fogyasztási reálegységekben</u> mérve:

$$dc_1 = (1+r_R)dc_0 \tag{1}$$

Mi történik, ha közben az <u>árszínvonal is változik</u>?

Legyen p_0^m a kezdeti időszak árszínvonala, p_1^m pedig a tárgyidőszaké; legyen továbbá m_0 és m_1 a kezdeti és tárgyidőszaki forgalomban levő pénzmennyiség (a gazdaság szereplőinél levő összjövedelem)!

Ekkor:

$$p_0^m = \frac{m_0}{c_0}, \tag{2a}$$

$$p_1^m = \frac{m_1}{c_1}. \tag{2b}$$

Átrendezve és c, illetve m szerint teljesen differenciálva:

$$p_0^m dc_0 = dm_0 \tag{2a'}$$

$$p_1^m dc_1 = dm_1 \tag{2b'}$$

24.15
Fisher-egyenlet
(folytatás - 1)

Definiáljuk a következő hányadost!

$$\frac{dm_1}{dm_0} = 1 + r_N \qquad (3)$$

Jelentése: jelenbeli nomináljövedelmünk dm_0 egységéről való lemondásért jövőbeli <u>nomináljövedelmünk</u> $(1+r_N)dm_1$ egysége képes bennünket kárpótolni. $(1+r_N)$ ennek a „jutalma”; r_N a <u>nominális kamatláb</u>.

Helyettesítsük be (3)-ba (2a’)-t és (2b’)-t!

$$1 + r_N = \frac{dm_1}{dm_0} = \frac{p_1^m dc_1}{p_0^m dc_0} \qquad (4)$$

Helyettesítsük be (4)-be dc_1 helyére (1)-et!

$$1 + r_N = \frac{p_1^m}{p_0^m} \frac{(1+r_R)dc_0}{dc_0} \qquad (5)$$

Vegyük észre, hogy $p_1^m / p_0^m = (1+\pi)$ nem más, mint a <u>nominális áremelkedés</u> (vagyis az infláció) mértéke, ahol π az <u>inflációs ráta</u>. Így (5) átírható a következőképpen:

$$1 + r_N = (1+\pi)(1+r_R) \qquad (6)$$

$$= 1 + \pi + r_R + \pi \cdot r_R$$

24.15
Fisher-egyenlet
(folytatás - 2)

Mivel $\pi \cdot r_R$ többnyire nullához közel eső kis szám, így megközelítően igaz, hogy*:

$$r_N \approx \pi + r_R \tag{7}$$

Ez a híres Fisher-egyenlet, mely kimondja:**

<u>A nominális kamatláb megközelítően egyenlő a reálkamatláb és az inflációs ráta összegével.</u>

Mivel a jövőbeli inflációs ráta többnyire nem ismert, ezért az egyenletben a <u>várt</u> inflációs ráta (π^e) szerepel, amelyre a gazdaság szereplői számítanak:

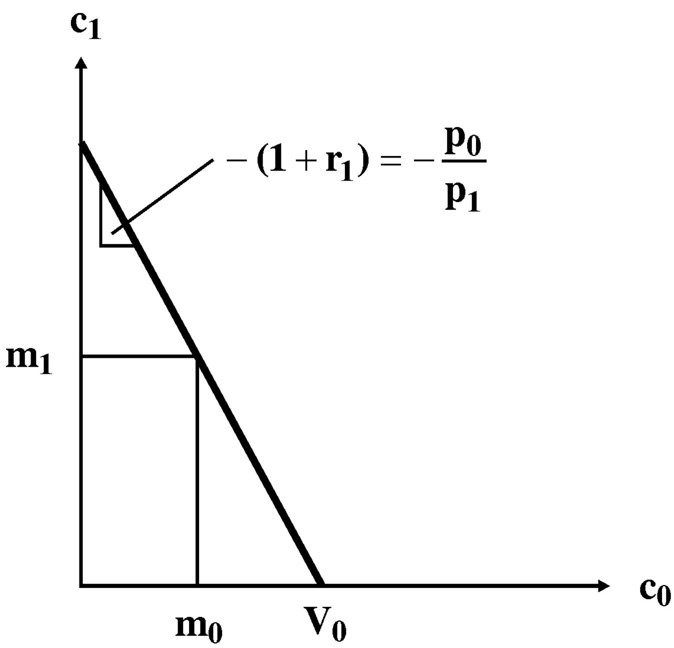
$$r_N \approx \pi^e + r_R \tag{8}$$

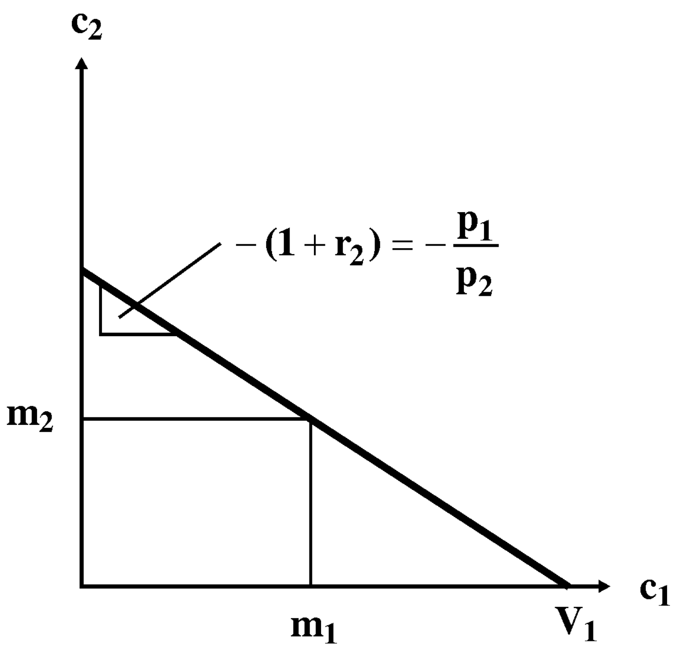
<u>Következmény:</u> minél nagyobbak az inflációs várakozások (minél magasabb π^e értéke), annál magasabb lesz a nominális kamatláb értéke is.

*** Pl. $\pi = 0{,}1$ és $r_R = 0{,}03$ esetén a torzítás mindössze $\pi \cdot r_R = 0{,}003$.**

**** Irving Fisher (1867-1947), amerikai közgazdász tiszteletére nevezték el így.**

24.16
Kettőnél több periódusú modell





t = 0,1:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r_1} = m_0 + \frac{m_1}{1+r_1} \equiv V_0$$

t = 1,2:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r_2} = m_1 + \frac{m_2}{1+r_2} \equiv V_1$$

kétperiódusú költségvetési korlátok

Hogyan fest a t = 0,1,2 : háromperiódusú modell költségvetési korlátja?

24.17
Rövid és hosszú távú kamatláb

A periódusok száma	Rövid távú kamatláb r_t	Hosszú távú kamatláb R_t
2	$\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{1+r_1}$	$\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{1+r_1}=\frac{1}{1+R_1}$
3	$\frac{p_2}{p_1}=\frac{1}{1+r_2}$	$\frac{p_2}{p_0}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}=\frac{1}{1+R_2}$
4	$\frac{p_3}{p_2}=\frac{1}{1+r_3}$	$\frac{p_3}{p_0}=\frac{p_3}{p_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)}=\frac{1}{1+R_3}$
⋮	⋮	⋮
$T+1$	$\frac{p_T}{p_{T-1}}=\frac{1}{1+r_T}$	$\frac{p_T}{p_0}=\prod_{t=1}^{T}\frac{p_t}{p_{t-1}}=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r_t)}=\frac{1}{1+R_T}$

24.18
Intertemporális költségvetési korlát kettőnél több periódus esetén

Háromperiódusú modell:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r_1} + \frac{c_2}{(1+r_1)(1+r_2)} = m_0 + \frac{m_1}{1+r_1} + \frac{m_2}{(1+r_1)(1+r_2)} \equiv V_0 .$$

T-periódusú modell ($r_0 = 0$):

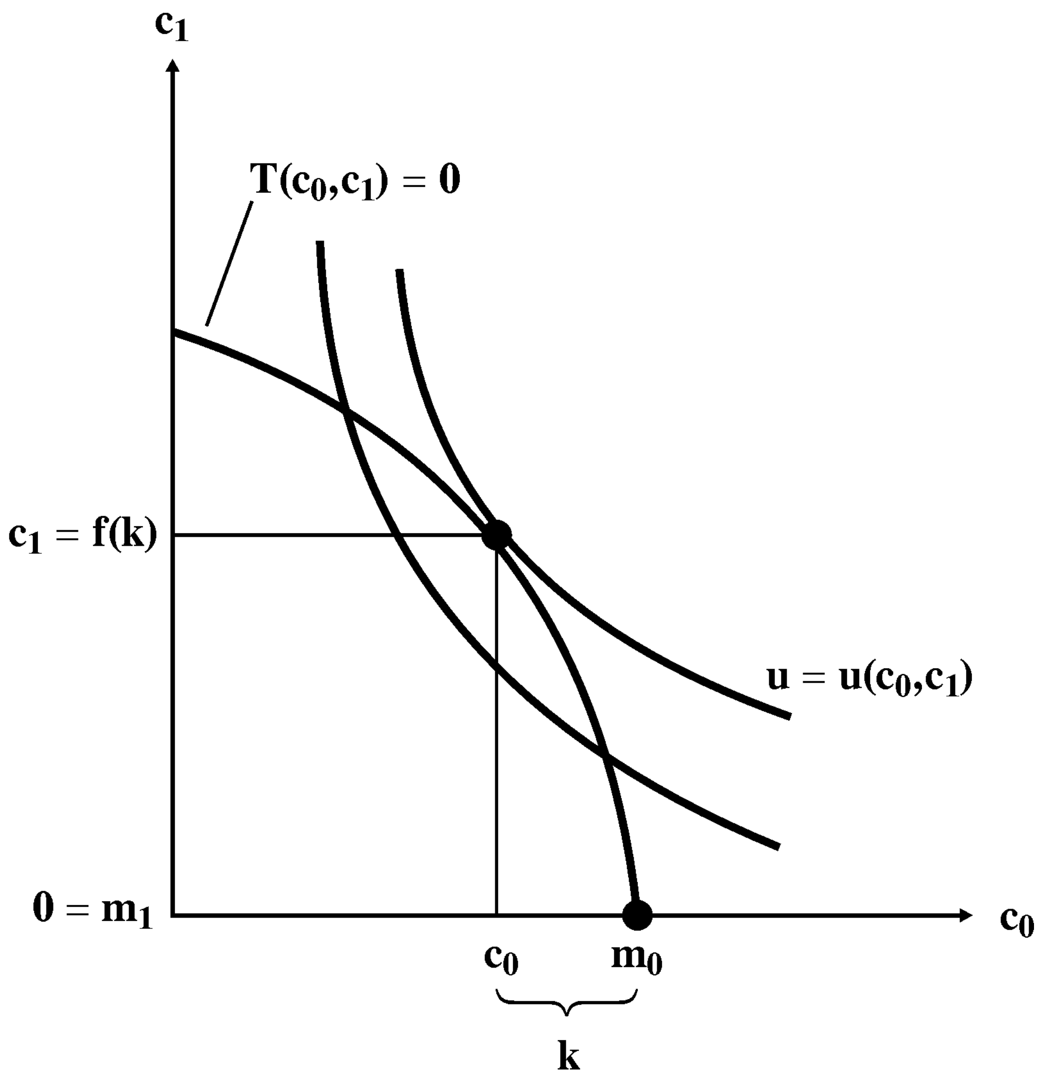
$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{\prod_{i=0}^{t}(1+r_i)} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{m_t}{\prod_{i=0}^{t}(1+r_i)} \equiv V_0 .$$

Ha $r_1 = r_2 = r_3 = ... = r_T = r$, akkor:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{m_t}{(1+r)^t} \equiv V_0 .$$

24.19
Intertemporális fogyasztói döntés termelés mellett (autarkia)

c_0, c_1	: idei és jövő évi búzafogyasztás
k	: a vetőmag mennyisége
$c_0 = m_0 - k$	: idei búzafogyasztás
$c_1 = f(k)$	: Termelési függvény: vetőmag $\Rightarrow$ jövő évi búzafogyasztás ($k \Rightarrow c_1$)
$m_0 > 0,\ m_1 = 0$	: induló búzakészlet



24.20
Egy technikai megjegyzés: $c_1 = f(k)$ és $T(c_0, c_1) = 0$ információtartalma megegyezik

Mivel: $c_0 = m_0 - k,\ c_1 = f(k),$

így $T(m_0 - k, f(k)) = 0$

Differenciáljuk k szerint!

$$\frac{\partial T(c_0, c_1)}{\partial c_0}(-1) + \frac{\partial T(c_0, c_1)}{\partial c_1} f'(k) = 0$$

Átrendezve:

$$f'(k) \equiv \frac{\partial T / \partial c_0}{\partial T / \partial c_1} = MRT.$$

Vagyis:

$$MRT \equiv f'(k).$$

24.21
A termelés melletti intertemporális fogyasztói döntési probléma megoldása (autarkia)

$$\max_{c_0, c_1, k} u(c_0, c_1) \tag{1}$$

kf-k:

$$c_0 = m_0 - k \tag{2}$$

$$c_1 = f(k) \tag{3}$$

Helyettesítsük be (2)-t és (3)-at (1)-be

$$\max_{k} u(m_0 - k, f(k)) \tag{4}$$

ERF:

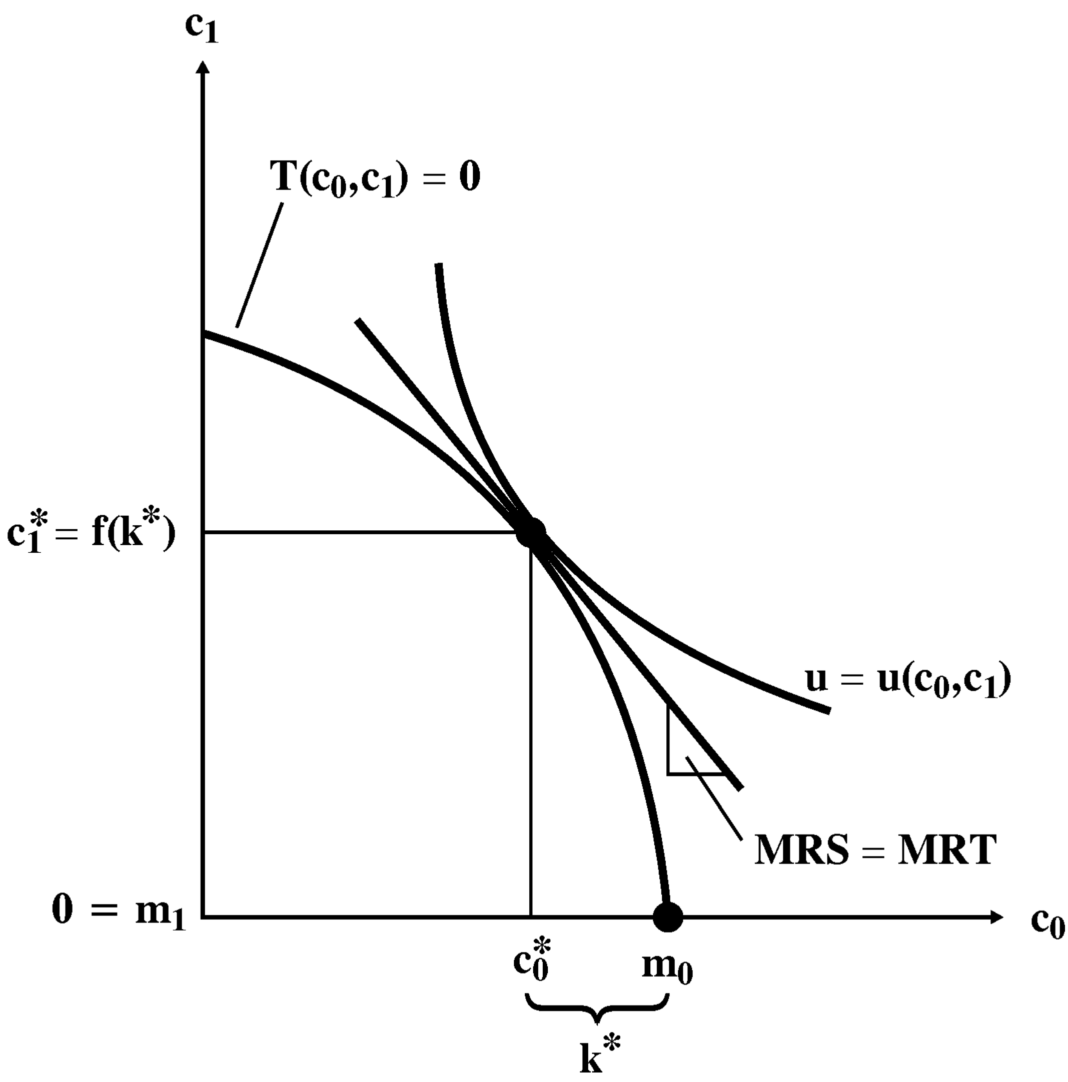
$$\frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_0}(-1) + \frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_1} f'(k) = 0 \tag{5}$$

Átrendezve:

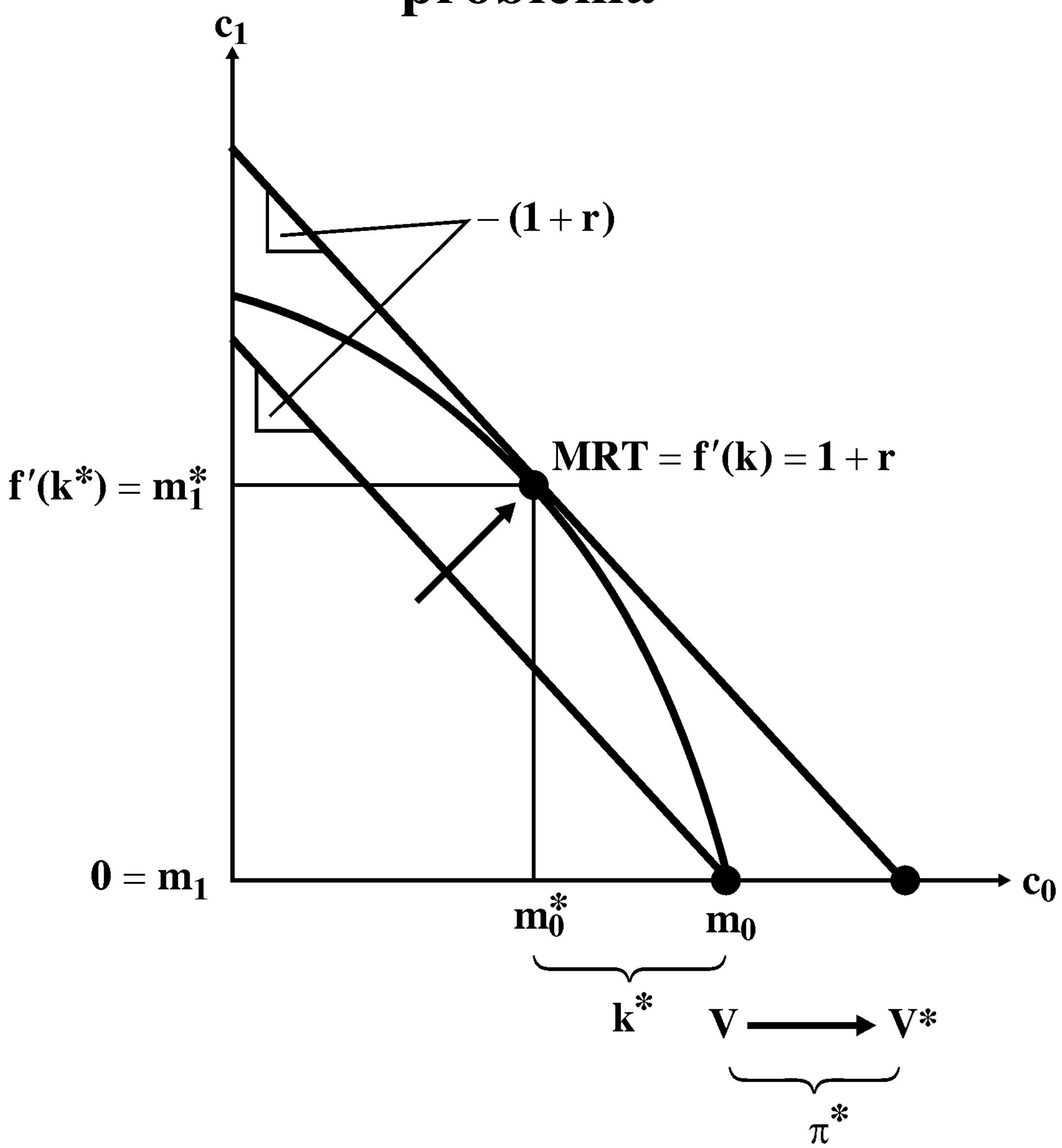
$$\frac{\partial u / \partial c_0}{\partial u / \partial c_1} = f'(k) \tag{6}$$

$$MRS = MRT \tag{6'}$$

24.22
A termelés melletti intertemporális fogyasztói döntési probléma megoldása (autarkia)



24.23
Az intertemporális termelői/beruházási probléma



$$V = m_0 + \frac{m_1}{1+r} = m_0 + 0 = m_0$$

π = profit

= (bevétel – kiadás) jelenértéke

= jövő évi bevételek jelenértéke – idei kiadás értéke

$$= \frac{f(k)}{1+r} - k$$

π^* = maximális π

24.24
Az intertemporális termelői/beruházási probléma algebrai megoldása

$$\max_k \pi = \frac{f(k)}{1+r} - k \tag{1}$$

ERF:

$$f'(k) = 1+r \tag{2}$$

$$MRT = 1+r \tag{2'}$$

(2) egyenlet megoldását (az optimális beruházási volument $= k^*$-ot) visszahelyettesítve az (1) profitfüggvénybe, megkapjuk az optimális profit értékét:

$$\pi^* = \frac{f(k^*)}{1+r} - k^* \tag{3}$$

Így, <u>termelés révén a profit értékével megnöveltük induló-készletünk jelenértékét</u>:

$$\begin{aligned} V^* &= V + \pi^* \\ &= m_0 + \left[\frac{f(k^*)}{1+r} - k^*\right] \\ &= (m_0 - k^*) + \frac{f(k^*)}{1+r} \\ &= m_0^* + \frac{m_1^*}{1+r}. \end{aligned} \tag{4}$$

24.25
Intertemporális fogyasztói döntési probléma tökéletes hitelpiacok jelenlétében

Mennyi lesz a farmer idei és jövő évi búzafogyasztása?

$$\max_{c_0, c_1} u(c_0, c_1) \qquad (1)$$

$$\text{kf:} \quad c_0 + \frac{c_1}{1+r} = m_0^* + \frac{m_1^*}{1+r} \equiv V^* = V + \pi^* \qquad (2)$$

$$L = u(c_0, c_1) - \lambda\left(c_0 + \frac{c_1}{1+r} - V^*\right) \qquad (3)$$

ERF-k:

$$c_0: \qquad \frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_0} = \lambda \qquad (4)$$

$$c_1: \qquad \frac{\partial u(c_0, c_1)}{\partial c_1} = \lambda \frac{1}{1+r} \qquad (5)$$

$$\lambda: \qquad c_0 + \frac{c_1}{1+r} = V^* \qquad (6)$$

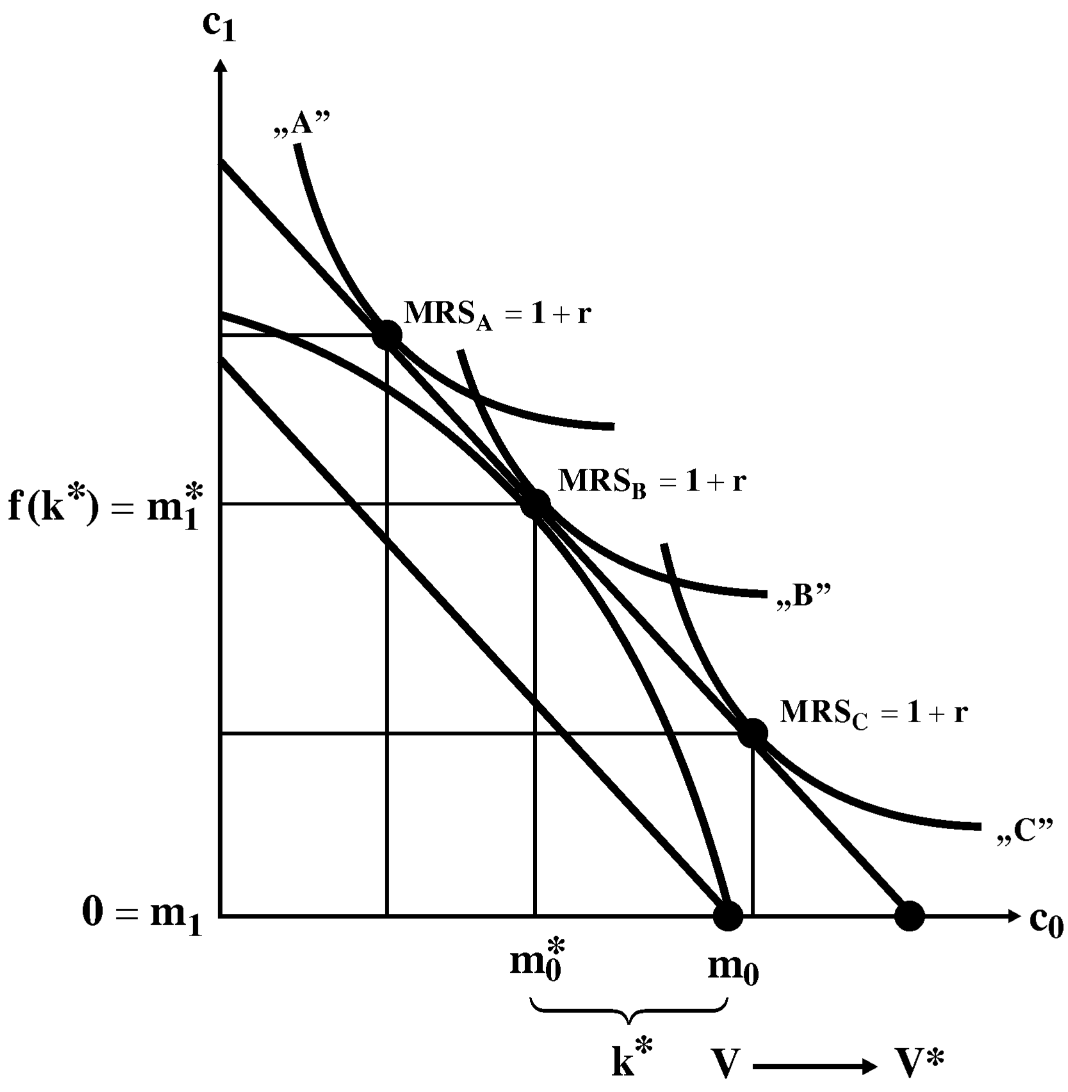
(4), (5) és (6) együttesen meghatározzák c_0^*-ot és c_1^*-ot.

(4)-et (5)-tel elosztva, megkapjuk az optimalitási feltételt (érintőfeltételt):

$$\frac{\partial u / \partial c_0}{\partial u / \partial c_1} = 1 + r \qquad (7)$$

$$MRS = 1 + r \qquad (7')$$

24.26
Az optimális beruházási döntés <u>bármilyen</u> időpreferenciájú fogyasztó intertemporális fogyasztói döntésével összeegyeztethető



$$MRS_A = MRS_B = MRS_C = 1 + r$$

24.27
Fisher-féle* szeparációs tétel

Az intertemporális termelői/beruházási feladat optimális megoldása tökéletesen független az egyéni preferenciáktól, amennyiben fennállnak bizonyos egyéb feltételek:

1. **Az intertemporális hasznossági függvénynek a jelen-, illetve jövőbeli fogyasztáson kívül nincs más argumentuma. Pl. A hasznossági függvény nem tartalmazza a szabadidő változóját egyik időpontban sem.**

2. **A tőkepiac/hitelpiac tökéletes. A betéti és hitelkamatlábak megegyeznek: $r_B = r_H = r$.**

---

* **Irving Fisher. Lásd a 24.14. fólia lábjegyzetét**